

ANN ALES  
DE LA  
SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE  
DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

TOME CINQUANTE-HUITIÈME, 1938

SÉRIE I

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

PREMIER FASCICULE

19 MARS 1938



*Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique*  
LOUVAIN

Secrétariat de la Société Scientifique

2, RUE DU MANÈGE, 2

Chèques postaux 2027.46 Chèques postaux Paris n° 110002

1938

Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé : 15 frs

# TABLE DES MATIÈRES

PAGES

Session du 27 janvier 1938, à Bruxelles.

PREMIÈRE SECTION : <b>Mathématiques</b> . . . . .	5
Les observations d'équinoxes et de solstices dans le chapitre 1 du livre 3 du Commentaire sur l'Almageste par Théon d'Alexandrie (2 <sup>e</sup> partie), par M. A. Rome . .	6
Contributions à la théorie des effets de latitude et d'asymétrie des rayons cosmiques V. Détermination des exposants caractéristiques des trajectoires périodiques, par M. O. Godart. . . . .	27
Théorie du mouvement gyroscopique des projectiles. Les états d'instabilité virtuelle. Les indéterminations Les perturbations initiales, par M. R. d'Adhémar .	42
DEUXIÈME SECTION : <b>Physique et Chimie</b> . . . . .	65
Sur la définition générale de l'entropie et les bases de la thermodynamique chimique, par M. W. Mund . . . . .	65
Calcul de la fonction potentielle et des fréquences fondamentales des molécules $C_2H_2D_2$ ( $x + y = 4$ ), par M. Yong-Li Tchang . . . . .	87
Sur la taille des lames de quartz perpendiculairement à l'axe optique, par M. A. Biot. .	98

Les ANNALES de la Société scientifique de Bruxelles ont paru depuis 1927 en quatre séries distinctes, plus un fascicule administratif.

Série A. Sciences mathématiques (1<sup>re</sup> section).

Série B. Sciences physiques et naturelles (2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> sections).

Série C. Sciences médicales (4<sup>e</sup> section).

Série D. Sciences économiques (5<sup>e</sup> section).

Les comptes rendus des assemblées générales se trouvent dans le fascicule administratif, qui paraît après la session de Pâques.

Les ANNALES sont divisées d'une nouvelle manière à partir de 1937 :

Série I. Sciences mathématiques et physiques (1<sup>re</sup>, 2<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> sections).

Série II. Sciences naturelles et médicales (3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> sections).

Série III. Sciences économiques (5<sup>e</sup> section).

Fascicule administratif.

La cotisation annuelle des membres (20 belgas) leur donne droit à l'ensemble de ces publications. Toutefois les membres peuvent renoncer, avant la fin de janvier de chaque année, à une ou deux séries et obtenir une ristourne de dix ou vingt francs sur la cotisation.

Le prix de l'ABONNEMENT aux ANNALES pour des personnes ne faisant pas partie de la Société scientifique est fixé par le tarif suivant :

	<i>Périodicité</i>	<i>en Belgique</i>	<i>en France</i>	<i>dans les autres pays</i>
Série I	trimestrielle	35 fr.	9 belgas	12 belgas
Série II	"	35 fr.	9 belgas	12 belgas
Série III	"	50 fr.	11 belgas	12 belgas
Toutes les séries		110 fr	28 belgas	35 belgas



SESSION DU 27 JANVIER 1938

A BRUXELLES

---

Première Section

---

### Sciences Mathématiques

---

Présidence de M. le Baron de la Vallée Poussin.

M. le V<sup>te</sup> R. d'Adhémar présente un mémoire intitulé : *Théorie du mouvement gyroscopique des projectiles. Les états d'instabilité virtuelle. Les indéterminations. Les perturbations initiales.*

M. O. Godart présente un travail intitulé : *Contribution à la théorie des effets de latitude et d'asymétrie des rayons cosmiques. V. Détermination des exposants caractéristiques des orbites périodiques.*

Ces mémoires paraîtront dans les *Annales*.

M. G. Lemaître fait un court exposé d'un mémoire intitulé : *Généralisation de la méthode de Hill*, qu'il a publié ailleurs en collaboration avec M. O. Godart.

---

# Les observations d'équinoxes et de solstices dans le chapitre 1 du livre 3 du Commentaire sur l'Almageste par Théon d'Alexandrie

Note de M. l'abbé A. Rome.

(Seconde partie)

RÉSUMÉ. — Dans une première partie (*Ann. Soc. scient.*, 57 (1937) 1, p. 219-236), on a décrit les observations directes d'équinoxes et de solstices, et la discussion que les anciens font des erreurs de ces observations. On examine maintenant les difficultés que créaient à Hipparque certaines mesures de la distance entre l'Épi et le point automnal. Enfin, de l'ensemble des faits rencontrés dans les deux parties, on tire des conclusions sur le but d'Hipparque et les procédés de Ptolémée.

**11. Mesure indirecte de la longueur de l'année.** — Hipparque avait à s'occuper d'une autre catégorie d'observations semblant indiquer une irrégularité dans la longueur de l'année <sup>(1)</sup> : en mesurant la longitude de l'Épi de la Vierge, la fameuse étoile qui lui sert à exposer, si pas à calculer, la précession des équinoxes, on l'avait trouvée, en  $-145$ , à  $6^{\circ} 1/2$  à l'Ouest du point automnal et en  $-134$  à  $5^{\circ} 1/4$  du même point. La précession ne suffisait pas à expliquer cela. Fallait-il introduire une nouvelle hypothèse, par exemple, une variation dans la position des points équinoxiaux entraînant une variation correspondante dans la longueur de l'année tropique ? ou bien, y avait-il erreur, et en quoi s'était-on trompé ? Hipparque admettait finalement qu'on s'était trompé.

Théon <sup>(2)</sup> explique comme suit la façon de mesurer la distance entre l'Épi et le point automnal :

Soit  $AB\Gamma\Delta$  l'écliptique, la direction  $AB\Gamma$  représentant le sens direct. A est le point vernal,  $\Gamma$  le point automnal. Supposons une éclipse de lune se

(<sup>1</sup>) Cfr. CLAUDII PTOLEMAEI Opera quae exstant omnia. vol I pars I ed. J.-L. Heiberg. Leipzig 1898, p. 199,1-201,8. Nous citons en abrégé : Alm., et le numéro de la page de la pars 1 ; lorsqu'il s'agit de la pars 2 nous le mentionnons explicitement. — THÉON D'ALEXANDRIE, Commentaire sur le 3<sup>e</sup> livre de l'Almageste, inédit. En attendant qu'il ait paru nous citons les folios du Mediceus 28.18. Le passage que nous étudions ici se trouve fol. 131<sup>r</sup> sqq.

(<sup>2</sup>) Cfr. Med. 28.18, fol. 131<sup>v</sup>. La figure est une simple circonférence. Nous donnons la substance de l'explication, sans traduire mot pour mot le texte de Théon.



produisant aux environs de l'équinoxe de printemps. Au milieu de l'éclipse, le soleil sera par exemple en Z, un peu avant le point vernal A. La lune est en E, diamétralement opposée. Une étoile fixe se trouve près de la lune, en H (un peu plus loin, Théon suppose que cette étoile est occultée par la lune au moment du premier contact).

On note l'heure du milieu de l'éclipse, et l'heure de l'équinoxe. Le temps qui s'écoule entre les deux, multiplié par le mouvement horaire moyen du soleil, donne la longueur de l'arc  $ZA = \text{EG}$ .

« Puisqu'au moment du premier contact, la lune se trouvait sur l'étoile » fixe H, comme le dit Hipparque dans le traité de la précession <sup>(1)</sup> », d'après le temps qui s'est écoulé entre le premier contact et le milieu, on calcule la longueur de l'arc HE, entre la lune et l'astre-repère H.

On mesure directement la distance HΘ entre l'astre-repère H et l'Épi de la Vierge Θ.

Une simple addition va ensuite donner ΘΓ.

C'est cet arc ΘΓ qui a présenté des variations insolites : En <sup>(2)</sup> l'an 32 de la 3<sup>e</sup> période de Callippe, Hipparque a trouvé l'Épi de la Vierge 6° 1/2 en avant (c'est-à-dire à l'Ouest) du point automnal ; après 11 ans de la même période, il l'a trouvé toujours en avant du point automnal, mais de 5° 1/4 seulement.

Théon présente cette méthode comme étant celle d'Hipparque, et il cite, en le raccourcissant un peu, le titre du traité sur la précession, à l'appui du détail qu'il ajoute à l'Almageste : l'étoile-repère est occultée par la lune au moment du 1<sup>er</sup> contact <sup>(3)</sup>. Il n'y a, en soi, aucune raison de penser que Théon n'a pas lu Hipparque. Lorsqu'on lit d'un trait le passage correspondant de l'Almageste, on a bien le sentiment que tout, y compris les deux dates d'observation, — 145 et — 134, vient du traité de la précession. Il faut pour cela prendre l'Almageste à partir de la p. 194, 16. Le traité de la précession y est nommé, avec son titre complet <sup>(4)</sup>, puis vient une citation littérale du traité, p. 194, 23-195, 9. La liste d'équinoxes qui suit (automne, p. 195, 10 à 196, 4 ; printemps, p. 196, 5 à 196, 21) est présentée explicitement comme provenant du même ouvrage. Ensuite vient une discussion par Ptolémée des résultats d'Hipparque (p. 196, 21 à 197, 23). Mais Hipparque, dit Ptolémée (p. 198, 1 sqq.), n'a pas cru devoir tirer de ces observations des conclusions sur l'irrégularité de l'année ; certaines éclipses de lune au contraire lui font trouver des variations dans la position de l'Épi. L'enchaînement de ces quelques pages semble bien montrer

(1) Cfr. Med. 28.18, fol. 132<sup>v</sup>. εἶτα, ἐπιλογισάμενος πόσον ἡ σελήνη <ἀπέχει> τοῦ Η, ἐκ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐμπτώσεως χρόνου, ἐπεὶ κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐμπτώσεως κατὰ τοῦ ἀστέρος ἔθεωρεῖτο, καθὼς καὶ ὁ Ἰππαρχος ἐν τῷ περὶ τῆς μεταπτώσεως τῶν τροπικῶν.

(2) Cfr. Med. 28.18, fol. 131<sup>v</sup>.

(3) Mais voir plus loin, p. 9, n. 1.

(4) περὶ μεταπτώσεως τῶν τροπικῶν καὶ ἰσημερινῶν σημείων.

que tout provient du traité de la précession, dont le titre se retrouve, abrégé, dans Théon. Ce dernier semble donc encore avoir lu le traité d'Hipparque, et nous apporter un détail, nouveau pour nous, qu'il y a trouvé.

## 12. Données numériques concernant les deux observations. —

Il est facile de réunir un certain nombre de données concrètes qui serviront de point de départ à la discussion.

La première observation date donc de l'an 32 de la 3<sup>e</sup> période de Callippe, soit —145. Nous avons déjà parlé dans la 1<sup>re</sup> partie de notre travail de l'équinoxe de printemps observé par Hipparque en cette année-là. Il s'est passé, dit Hipparque, le 27 Mechir au matin, mais le cercle d'Alexandrie a indiqué l'équinoxe à 5 h. (= 11 h. du matin). La date retenue par Hipparque est le 27 Mechir au matin. D'après la table de Schram <sup>(1)</sup>, nous avons trouvé que l'équinoxe avait dû avoir lieu le 24 mars —145 à 16 h. 12 m. 8,64 s. temps vrai de Greenwich, soit <sup>(2)</sup> à Rhodes, 18 h. 4 m., à Nicée à 18 h. 11 m., et par 30° de longitude à 18 h. 12 m.

L'éclipse a eu lieu le 21 avril—145. D'après la table de Schoch <sup>(3)</sup> nous trouvons que le milieu se place à 21 h. 12,4 m. temps vrai Greenwich (21 h. 27,6 m. temps moyen). Demi durée de la totalité : 51,4 minutes ; demi-durée de l'éclipse : 111,8 minutes. Grandeur de l'éclipse : 20,7 doigts.

Au milieu de l'éclipse :

longitude de la lune : 207°,382 ; latitude <sup>(4)</sup> : + 0°,09.

Au 1<sup>er</sup> contact extérieur :

longitude de la lune : 206°,34 ; latitude : 0,00.

rayon apparent de la lune : 0,26 (fraction décimale de degré)

Parallaxe lunaire à Rhodes : en longitude + 0,687

en latitude — 0,45

à Nicée : en longitude + 0,656

en latitude — 0,51

Il est inutile de tenir compte de la réfraction, puisque les étoiles en sont affectées aussi.

<sup>(1)</sup> R. SCHRAM, Kalendariographische und Chronologische Tafeln, Leipzig 1908, p. 358 sqq. Nous comptons les jours à partir de minuit.

<sup>(2)</sup> Nous adoptons pour Rhodes les coordonnées du mont Atabyrion où s'est trouvé un temple de Zeus, et qui est le point culminant de l'île (1215 m.), soit 27°52' (= 1 h. 51 m. 28s.) Est Greenwich, et 36°12' lat. nord. Pour Nicée, 29,8° (ou 1 h. 59 m.) Est Greenwich et 40,5° lat. nord (en degrés et fractions décimales de degrés).

<sup>(3)</sup> C. SCHOCH, Die Neubearbeitung der Syzygientafeln von Oppolzer dans *Mitteilungen des astronomischen Rechen Instituts Berlin-Dahlem* 2,2 (1928).

<sup>(4)</sup> Latitudes de la lune, course de la lune pendant la demi-durée de l'éclipse, et parallaxes calculées d'après les tables de P. V. NEUGEBAUER, *Tafeln zur astronomischen Chronologie*, Leipzig 1922 à 1915 et P. V. NEUGEBAUER, *Astronomische Chronologie*, Berlin 1929.



Nous ne trouvons pas de planète <sup>(1)</sup>, ni d'étoile mentionnée par l'Almageste, qui soit occultée ou presque, au moment du 1<sup>er</sup> contact.  $\kappa$  de la Balance (long. 207,916 ; lat. + 0,283) se trouve sur le chemin de la lune entre le milieu et la fin de l'éclipse. Mais la parallaxe à Rhodes et à Nicée fait apercevoir la lune beaucoup plus au Sud. N'empêche que cette étoile est la plus proche de la lune au moment du premier contact. A moins qu'on ne suppose qu'une étoile non mentionnée par l'Almageste et visible à l'œil nu (il n'y en a pas beaucoup) ait été occultée.

Finalement, l'Épi ( $\alpha$  Vierge) en -145 a une longitude de 174,06 et une latitude de -4,916.

La seconde observation est de l'an 43 de la 3<sup>e</sup> période de Callippe, soit

<sup>(1)</sup> G. PETERS et E. KNOBEL, Ptolemy's catalogue of stars, *Carnegie Institute Publications* n° 86, Washington 1915, donnent, pour chaque étoile mentionnée dans l'Almageste sa longitude et sa latitude, pour les années +100 et -129. Admettant pour la valeur annuelle de la précession, la formule  $50'',2564 + 0'',0222 T$ , où T est le nombre de siècles compté à partir de 1900,0, on trouve que 49,8'' est une bonne valeur de la précession en un an pendant le 2<sup>e</sup> siècle av. J.-C. Il suffit d'introduire cette valeur dans le catalogue de Peters et Knobel pour -129, et l'on trouve la position des étoiles pour l'instant de l'éclipse, avec une approximation suffisante parce que la date de -145 est très proche de -129.

Voici dans ces conditions, les étoiles mentionnées par l'Almageste, dont la longitude était peu différente de celle de la lune au moment de l'éclipse de -145 :

$\epsilon$ Serpent	long. 204,349	lat. +24,149
$\kappa$ Centaure	long. 205,049	lat. -23,800
$\beta$ Loup	long. 205,283	lat. -24,783
$\gamma$ Balance	long. 205,300	lat. + 4,600
$\kappa$ Hercule	long. 205,749	lat. +37,449
$\mu$ Serpent	long. 206,116	lat. +16,483
$\pi$ Loup	long. 207,883	lat. -28,183
$\kappa$ Balance	long. 207,916	lat. + 0,283
$\lambda$ Loup	long. 207,949	lat. -26,300
Arg 14782	long. 208,300	lat. - 1,183
$\eta$ Hercule	long. 208,600	lat. +60,549
39 Balance	long. 208,816	lat. - 8,266
$\delta$ Loup	long. 208,883	lat. -21,200
$\gamma$ Hercule	long. 209,250	lat. +40,217
$\tau$ Balance	long. 209,549	lat. - 9,749
$\kappa$ Loup	long. 209,716	lat. -29,400
$\theta$ Balance	long. 210,000	lat. + 3,600
$\epsilon$ Loup	long. 210,350	lat. -25,000
$\psi$ Balance	long. 210,550	lat. + 6,316
$\mu$ Loup	long. 210,616	lat. -28,250
$\lambda$ Balance	long. 210,650	lat. + 0,316

Pour les planètes, la table de P. V. NEUGEBAUER dans *Astronomische Nachrichten* 248 (1933) n° 5937 nous a donné des positions approximatives tellement distantes de celles de la lune, qu'il était inutile de faire des calculs plus exacts. De même pour l'éclipse de -134.

—134. Nous avons déjà parlé, dans la première partie de notre travail, de l'équinoxe de printemps observé par Hipparque la nuit du 29/30 Mechir après minuit (nuit du 23/24 mars). D'après Schram, l'équinoxe a dû se produire le 24 mars à 8 h. 10 m. 11 s. temps vrai de Greenwich, soit 10 h. 2 m. à Rhodes, 10 h. 9 m. à Nicée, et 10 h. 10 m. sous le 30° de longitude.

L'éclipse a eu lieu le 21 mars à 0 h. 24,0 m. temps vrai de Greenwich (0 h. 42,1 m. temps moyen).

Demi-durée de la totalité : 50,7 m. ; demi-durée de l'éclipse : 116,6 m. ; grandeur : 18,8 doigts.

Au milieu de l'éclipse :

Longitude de la lune : 176, 922 ; latitude —0,13.

Au 1<sup>er</sup> contact extérieur :

Longitude de la lune : 176,00 ; latitude —0,05.

Rayon apparent de la lune : 0,24 degré

Parallaxe de la lune à Rhodes : en longitude : + 0,13  
en latitude : — 0,53

Parallaxe de la lune à Nicée : en longitude : + 0,12  
en latitude : — 0,60.

Aucune planète n'est aux environs de la lune. *h* de la Vierge vient de sortir du disque de la lune au moment du 1<sup>er</sup> contact : en effet, cette étoile *a*, en —134, une longitude de 175,600 et une latitude de —0,300. Comme sa grandeur est de 5,4 (6 dans l'Almageste) il faut qu'elle soit fort loin du disque lunaire pour qu'on la voie s'en détacher <sup>(1)</sup>.

(1) Voici, obtenu de la même façon que la liste précédente, un tableau des étoiles, mentionnées par l'Almageste, qui avaient en —134 une longitude comprise entre 173° et 178° :

<i>z</i> Vierge	long. 172,583	lat. +8,783
53 Vierge	long. 173,016	lat. —7,666
<i>l</i> Vierge	long. 173,916	lat. +3,233
(l'Épi) <i>α</i> Vierge	long. 174,200	lat. —1,916
<i>ι</i> Vierge	long. 175,133	lat. 3,183
<i>h</i> Vierge	long. 175,600	lat. —0,300
61 Vierge	long. 175,683	lat. —8,449
<i>m</i> Vierge	long. 177,100	lat. +1,866
<i>ρ</i> Vierge	long. 177,500	lat. +9,750

Nous avons contrôlé nos calculs des éclipses en consultant les tables de Ginzel et de von Oppolzer. D'autre part, nous les avons refaits en nous servant uniquement de l'Almageste : L'éclipse de —145 tombe le 25 Pharmouthi 602, ère de Nabonassar, à 11 h. 14 m. à partir de midi, temps vrai d'Alexandrie ; la longitude vraie de la lune au moment de la syzygie vraie est 207°37' et la grandeur de l'éclipse est de 20 doigts. L'éclipse de —134 est arrivée le 27 Mechir de l'an 613, ère de Nabonassar, à 14 h. 24 m. à partir de midi, temps vrai d'Alexandrie ; la longitude vraie de la lune à la syzygie vraie est 176°16' et la grandeur de l'éclipse est de 19 doigts. Somme toute ce résultat, comparé à ceux des tables modernes, n'est pas mauvais du tout. Mais il est probable qu'Hipparque ne disposait pas



**13. Détails de l'observation.** — La position de la lune étant obtenue en calculant le mouvement moyen du soleil entre l'équinoxe et le milieu de l'éclipse, la première chose qu'il fallait savoir était l'instant de l'équinoxe. Nous en avons parlé assez dans la première partie de cet article.

Il fallait aussi noter exactement l'instant du milieu de l'éclipse. On disposait pour cela de plusieurs moyens. L'astrolabe plan, par exemple, paraît avoir été connu d'Hipparque. Mais Fotheringham <sup>(1)</sup> remarque qu'il ne doit pas avoir été considéré comme un instrument de précision.

L'astrolabe (sphérique) ou le météoroscope, ou toute autre variété de sphère armillaire permettait aussi de trouver l'heure la nuit pour l'observation de hauteurs d'étoiles. Nous avons décrit le procédé ici-même <sup>(2)</sup>, et nous n'y reviendrons plus.

M. Pogo signale <sup>(3)</sup> que les Égyptiens avaient des listes de levers d'étoiles qui permettaient de trouver l'heure la nuit si la date est donnée.

Tous ces moyens de connaître l'heure la nuit venaient à tout le moins contrôler et rectifier le procédé que l'on croit avoir été le plus souvent employé, la clepsydre. Fotheringham et Schoch <sup>(4)</sup> se sont occupés de l'erreur commise par la clepsydre. Schoch pense que cette erreur devait s'accumuler : si une clepsydre à marche régulière avançait de 5 minutes à la 1<sup>re</sup> heure, elle avançait de 10 minutes à la 2<sup>e</sup> et ainsi de suite ; en sorte qu'au bout de la nuit elle aurait avancé de toute une heure. Aussi ces deux auteurs considèrent-ils comme seules bien notées les heures des éclipses de lune qui se passent peu après le coucher du soleil. A première vue, cette remarque paraît évidente. Seulement, l'observation des étoiles fournissait un moyen facile de contrôler. Et même une erreur s'accumulant au point où Schoch le dit se contrôlerait toute seule : la clepsydre avançant d'une heure au bout de la nuit, on ne pouvait manquer de constater que le soleil n'était pas levé, et compter de combien le lever suivait la fin de la 12<sup>e</sup> heure marquée par la clepsydre. Une réduction proportionnelle aurait alors donné une meilleure approximation de tous les temps observés pendant cette nuit-là. D'ailleurs Pappus <sup>(5)</sup> (et aussi le

---

de tables aussi bonnes : en tous cas, Ptolémée dit avoir dû modifier certaines données d'Hipparque, relatives au mouvement de la lune. Cfr. Alm. livre 4, chap. 2 et 11 ; l'introduction, au 5<sup>e</sup> livre, d'une seconde anomalie n'affecte pas les calculs d'éclipses.

(1) Cfr. *Nature* (Londres) 131 (1933) p. 821.

(2) Cfr. l'Astrolabe et le Météoroscope, dans *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 47 (1927) série A, p. 88, et THÉON, Commentaire sur les livres 1 et 2 de l'Almageste, *Studi e Testi* 72 (1936) p. 419, n. 1.

(3) A. POGO, Three unpublished calendars from Asyut dans *Osiris* 1 (1936) p. 501.

(4) J. K. FOTHERINGHAM, Two babylonian eclipses dans *Monthly notices* 95 (1935) p. 719. — C. SCHOCH, Die säkulare Acceleration des Mondes und der Sonne dans *Astronomische Abhandlungen, Ergänzungshefte zu den Astronomischen Nachrichten* 8,2 (1931) p. B2.

(5) PAPPUS, Commentaire sur les livres 5 et 6 de l'Almageste. *Studi e Testi* 54 (1931)

papyrus astronomique d'Oslo) indique une autre façon d'observer le temps à la clepsydre : c'est de comparer, à l'aide de l'eau écoulée, le temps à mesurer avec la longueur du jour entier. De cette façon, les défauts de graduation n'entraient plus si fort en jeu : il suffisait d'avoir un écoulement constant. Théon admet <sup>(1)</sup> comme une chose entendue que se tromper de deux heures dans la prédiction d'une éclipse de lune est une erreur qui ne peut échapper à l'attention. D'autre part Ptolémée <sup>(2)</sup> considère une erreur de  $\frac{1}{16}$  d'heure, dans des calculs d'éclipse de lune, comme tellement minime qu'ergoter là-dessus est plutôt digne d'un faiseur d'embarras que d'un savant cherchant la vérité. Pappus trouve tout naturel qu'on se trompe souvent de  $\frac{1}{8}$  d'heure en observant la lune. Les anciens pensaient donc savoir l'heure la nuit à dix minutes près. Ce qui ne veut pas dire qu'ils ne se faisaient pas illusion.

D'après Théon, il semblerait qu'on a pris pour repère une étoile occultée par la lune au moment du premier contact. Pour l'éclipse de —134, *h* de la Vierge paraît répondre assez bien à ce signalement. Mais pour l'éclipse de —145 nous n'avons pas pu découvrir une étoile mentionnée par l'Almageste, occultée au moment du premier contact. On pourrait songer à expliquer autrement le texte emprunté par Théon à Hipparque : l'étoile aurait même longitude que la lune. La liste de la note 1, p. 9 montre qu'en ce cas, la lune s'encadre entre  $\mu$  Serpent 206.416 et  $\pi$  Loup 207.883 ; mais comme son disque ne s'étend, y compris la parallaxe à Rhodes, que de 206.77 à 207.29, toutes deux sont fort loin et  $\kappa$  Balance (long. 207.916 lat. 0,283) est à tout prendre, encore plus satisfaisante. Il faudrait donc admettre que l'étoile occultée est une étoile non cataloguée dans l'Almageste, ou bien remplacer l'étoile occultée par celle qui se trouve le plus près de la lune.

On est tenté d'admettre cette seconde explication parce que Théon, analysant les causes d'erreurs dans un passage que nous étudierons plus loin <sup>(3)</sup>, nomme en première ligne l'estimation approximative de la distance entre la lune et l'astre repère. Ce détail semble même exclure l'occultation. Il n'en est rien : décider à l'œil nu qu'une étoile entre dans le disque de la lune ou en sort, est réellement quelque chose d'approximatif : Schoch s'est beaucoup occupé de cette question, après Fother-

---

p. 87. — S. EITREM, Fragment of astronomy on an Oslo Papyrus dans *Aegyptus* 13 (1933), p. 479-486. — M. PIEPER, Zum astronomischen Papyrus von Oslo dans *Symbolae Osloenses* 13 (1934), p. 147. — O. NEUGEBAUER, Zum astronomischen Papyrusfragment Pap. Osl. 73 dans *Symbolae Osloenses* 17 (1937), p. 49-53.

<sup>(1)</sup> THÉON, Cfr. Med. 28.18, fol. 133<sup>a</sup>. Du reste, Ptolémée dit exactement la même chose au passage correspondant, Alm. 201.5.

<sup>(2)</sup> PTOLÉMÉE. Cfr. Alm., 505 25. — PAPPUS, Commentaire sur les livres 5 et 6 de l'Almageste, p. 58.11-14.

<sup>(3)</sup> Cfr. infra p. 16, et Med. 22.18, fol. 132<sup>a</sup>.



ingham. Mais tandis que Fotheringham admettait que l'étoile disparaît lorsqu'elle se trouve à 3' du disque lunaire, Schoch trouve que ce chiffre ne vaut que pour les étoiles de 1<sup>re</sup> grandeur — il nomme l'Épi —, tandis que pour les autres la distance de l'étoile au bord du disque au moment de l'immersion augmente lorsque la grandeur diminue. Pour 19 du Taureau (5<sup>e</sup> grandeur) l'occultation paraît se produire lorsque l'astre est à 8' de la lune. Cet « arcus visionis » n'est d'ailleurs pas le même sous tous les climats. A propos de la question analogue du lever héliaque des étoiles, M. P. V. Neugebauer note que les valeurs que Schoch lui assigne sont bonnes pour Babylone mais pas pour d'autres régions, et que les expériences de Schoch montrent tout au plus qu'on peut parfois par hasard avoir sous nos climats un ciel aussi pur que celui de la Mésopotamie <sup>(1)</sup>. Pour les occultations par la lune, M. P. V. Neugebauer <sup>(2)</sup> paraît n'admettre comme observables à l'œil nu que celles où entrent en jeu une planète ou Aldébaran, Regulus, l'Épi ou Antarès, en quoi il semble contredit par la pratique des astronomes anciens, mieux au courant, de par la force des choses, des possibilités d'observation à l'œil nu.

La distance en longitude entre l'Épi et l'astre repère se lit directement sur un astrolabe sphérique. Nous avons expliqué ici-même <sup>(3)</sup> le procédé suivi : l'on doit toujours partir d'une étoile repère dont la longitude est connue d'avance. C'est ce qui explique qu'on ait eu recours, dans le cas dont nous nous occupons aujourd'hui, à tout cet échafaudage de longitudes qui finissent par être déduites d'une observation d'équinoxe.

Somme toute, en mettant ensemble tous les détails que nous pouvons recueillir dans nos diverses sources, il semble que le procédé d'observation peut être reconstitué avec assez de précision.

#### 14. Critiques de ces observations par les auteurs modernes. —

On pourra trouver étrange que nous ouvrons la liste des auteurs modernes par Delambre, l'un des créateurs, il y a 150 ans, du système métrique décimal. Celui qui le négligerait risquerait de faire dans Théon d'Alexandrie des découvertes qui ne seraient pas très neuves : il est un des rares historiens qui aient bien dépouillé Théon. Le troisième livre lui a pourtant échappé, parce qu'il ne se trouve dans aucun manuscrit parisien. Il a posé toute une série de questions, au sujet des observations d'éclipses dont nous parlons en ce moment <sup>(4)</sup>. Ne possédant aucune édition de l'Almageste à laquelle on pouvait se fier, il lui arrive d'être trop sceptique, au

---

(1) P. V. NEUGEBAUER, *Astronomische Chronologie*, p. 154.

(2) P. V. NEUGEBAUER, *Astronomische Chronologie*, p. 88.

(3) Cfr. L'astrolabe et le météoroscope dans *Ann. Soc. scient. Brux.*, 47 (1927) série A, p. 88.

(4) DELAMBRE, *Histoire de l'astronomie ancienne*. Paris, 1817, tome 2, p. 104 sqq. ; voir aussi p. 207.

point par exemple de n'avoir pas remarqué que l'on pouvait aisément dater les deux éclipses, d'après ce que Ptolémée en dit. Nous ne voyons pas non plus qu'Hipparque connaissait mieux que Ptolémée la parallaxe de la lune. Mais dans la liste de questions qu'il pose, il s'en trouve encore que nous n'avons pas su résoudre : les deux éclipses ont-elles été observées dans le même lieu, ou dans des lieux dont la différence de longitude fût suffisamment connue ? Comment avait-on déterminé l'heure du phénomène ? Il termine par une suggestion intéressante : la variation de la distance entre l'Épi et le point automnal ne serait-elle pas due au fait qu'on a négligé la parallaxe de la lune ? « 38' de parallaxe en longitude, » en un sens, dans une observation, et 37' dans un autre sens dans l'autre » observation », suffiraient à expliquer cette variation de  $1^{\circ} \frac{1}{4}$ .

Sans savoir mieux que Delambre en quel endroit les éclipses ont été observées, nous pouvons nous donner une idée de la parallaxe. On voit, pp. 8 et 13 ci-dessus, qu'à Rhodes comme à Nicée la parallaxe de la lune doit être ajoutée à la longitude, lors des deux éclipses. Il faudrait supposer, pour avoir une parallaxe négative lors du premier contact, que l'observation de —134 a été faite à Babylone : la parallaxe en longitude est en effet de —0,06 en cet endroit. Mais pour que la parallaxe soit à la fois négative et assez grande pour que les choses se soient passées comme Delambre le suggère, il faudrait aller beaucoup plus loin à l'Est, et sortir complètement des régions qui se trouvaient en relations régulières avec le monde grec. D'ailleurs les deux équinoxes sont très probablement observés par Hipparque lui-même, et les deux éclipses aussi.

Nous n'arrivons pas non plus à expliquer par un effet de parallaxe la variation de  $1^{\circ} \frac{1}{4}$  si nous prenons, contre l'avis de Théon, le milieu de l'éclipse : en —145, à Rhodes, au milieu de l'éclipse, la parallaxe en longitude est de +0,33 environ, et en —134 elle est de —0,16 dans les mêmes conditions. La suggestion de Delambre ne doit pourtant pas être rejetée sans plus, car elle pourrait tout au moins rendre compte d'une partie de l'erreur. Nous y reviendrons plus loin, p. 18.

Fotheringham <sup>(1)</sup> s'est occupé ex professo des occultations d'étoiles par la lune mentionnées dans l'Almageste. Il écarte ces deux observations-ci, qui sont visiblement inexactes et mentionnées comme inexactes par Ptolémée. Il se borne à celles du livre 7 chapitre 3. Mais nos deux observations d'éclipses sont examinées en passant dans le mémoire que nous avons eu fréquemment à citer dans la première partie du présent article <sup>(2)</sup>. Il considère ces deux observations comme deux cas extrêmes de toute une

---

<sup>(1)</sup> J. K. FOTHERINGHAM et G. LONGBOTTOM, The secular accelerations of the moon's mean motions as determined from the occultations in the Almagest dans *Monthly notices of the royal astron. soc.*, 75 (1915), p. 377-394.

<sup>(2)</sup> J. K. FOTHERINGHAM, The secular acceleration of the sun as determined from Hipparchus' equinox observations, dans *Monthly notices*, 78 (1918), p. 417-419.



série <sup>(1)</sup> (cfr. Alm., 128.13-15). Ses données numériques viennent de von Oppolzer et de Newcomb, et diffèrent peu de celles que nous avons obtenues. On sait d'ailleurs que Schoch a été le collaborateur de Fotheringham.

Nous pensons qu'Hipparque a rejeté l'hypothèse d'une oscillation des points équinoxiaux, ce qui ressemblerait à la théorie connue au moyen âge sous le nom de trépidation, et dont il y a des traces dans l'antiquité (chez Théon d'Alexandrie). On peut difficilement dire qu'Hipparque a été amené à « favour a false hypothesis ». Il a discuté ces observations, comme il le devait pour que la question fût traitée complètement. Mais il ne s'est pas laissé entraîner par elles.

D'après Ptolémée <sup>(2)</sup>, qui cite le texte même d'Hipparque, la théorie de la précession des équinoxes était exposée par Hipparque à partir des variations survenues dans la distance entre l'Épi et le point automnal. Ces variations étaient décelées par l'observation d'éclipses de lune au temps de Timocharis (—294 environ) comparées à des observations du temps d'Hipparque. D'autres étoiles que l'Épi ont été observées, Ptolémée le dit explicitement. La longitude de l'Épi avait passé, d'après l'exemple que donne Ptolémée, de 172° à 174°. Cela ferait environ 0°0'45" par an, excellente valeur, en tous cas meilleure que celle donnée par l'Almageste <sup>(3)</sup> d'après le traité d'Hipparque sur la longueur de l'année, 1 degré au moins pour cent ans. Fotheringham croit que Hipparque n'a rien osé tirer de plus précis de ses longitudes de l'Épi, vu les variations qu'il constatait dans ses propres mesures. Nous n'examinerons pas pour le moment cette question. Contentons-nous de signaler que les longueurs de 8° et de 6° assignées à l'arc d'écliptique qui sépare l'Épi du point automnal sont données en chiffres ronds. Ainsi, des observations d'occultations de l'Épi par la lune exécutées par Timocharis dans la nuit du 9 au 10 Mars — 293 et du 8 au 9 Novembre — 282, Ptolémée déduit que l'Épi était respectivement à 82°20' et à 82°30' du solstice d'été en ces années-là, soit donc à 7°40' et 7°30' de l'équinoxe d'automne.

**15. Discussion de ces observations par les anciens.** — Ptolémée fait remarquer que l'équinoxe de l'an 32 de la 3<sup>e</sup> période (—145), point

---

<sup>(1)</sup> Cette série ne peut pas être bien longue, si elle se compose d'observations faites par Hipparque lui-même : on ne trouve pas un grand nombre d'éclipses de lune, visibles dans la région de Rhodes, et arrivées pas très loin de l'équinoxe de printemps, par exemple en février, mars et avril. Un simple coup d'œil à von Oppolzer ou à Ginzell suffit à le faire voir : il n'y en a qu'une seule entre celle de —145 et celle de —134, c'est celle du 1<sup>er</sup> avril —135. Encore n'a-t-elle que 8,8 doigts. Après, il faut aller jusqu'à celle du 29 février —124, de 9,8 doigts.

<sup>(2)</sup> Almageste, pars 2, pp. 12-13 (ed. Heiberg).

<sup>(3)</sup> Almageste, pars 2, pp. 28 sqq.

de départ de la mesure de longitude qui a placé l'Épi à  $6^{\circ} \frac{1}{2}$  du point automnal, est considéré par Hipparque comme bien observé <sup>(1)</sup>. De même, l'équinoxe de l'an 43 de la 3<sup>e</sup> période (—134) qui a donné  $5^{\circ} \frac{1}{4}$  pour la distance de l'Épi au point automnal, est compté par Hipparque comme bien observé <sup>(2)</sup>. En doutant de la longueur de l'année à cause des variations de longitude, Hipparque admettait à la fois que les équinoxes étaient bien et mal observés <sup>(3)</sup>. Aussi Ptolémée se hâte-t-il d'ajouter qu'il n'y avait chez Hipparque qu'un doute systématique.

Il y avait autre chose à incriminer, dit Ptolémée <sup>(4)</sup>, que les équinoxes. « Il est permis de trouver beaucoup plus probable, ou bien que la distance » de la lune éclipsée aux étoiles les plus proches a été déterminée d'une » façon trop approximative; ou bien que les calculs, soit ceux de la » parallaxe lunaire permettant de trouver la position apparente, soit ceux » du mouvement solaire entre l'instant de l'équinoxe et celui du milieu de » l'éclipse, n'ont pas été justes, ou poussés assez loin. »

Théon <sup>(5)</sup> explique ce passage concrètement, avec les lettres de la figure tracée au commencement; il n'ajoute aux causes d'erreur énumérées par Ptolémée, qu'un seul détail, celui des erreurs possibles dans la mesure de la différence en longitude entre l'astre repère H et l'Épi, Θ. Il rappelle qu'en calculant la distance à laquelle le soleil se trouve du point vernal, on néglige l'anomalie, et l'on ne tient compte que de la vitesse moyenne, qui serait elle-même calculée, si l'on doit prendre au pied de la lettre ce que Théon dit un peu plus loin (fol. 132<sup>v</sup>), en admettant que le soleil parcourt 360° en 365  $\frac{1}{4}$  jours.

Essayons de voir quelle part chacune des causes d'erreurs détaillées par Ptolémée et Théon peut avoir eue dans l'erreur totale.

En —145 Hipparque trouvait l'Épi à  $6^{\circ},5$  du point automnal, alors que la longitude de cette étoile était d'environ 174°,06 : il exagère donc la distance de 0°,56 (ou 0°34') environ.

En —134 Hipparque trouvait l'Épi à  $5^{\circ},25$  du point automnal, alors que la longitude de cette étoile était d'environ 174°,20 : il réduit donc la distance de 0°,55 (ou 0°33') environ.

Suivons pour chacune des deux éclipses la liste des causes d'erreurs telle qu'elle figure dans Théon :

1<sup>o</sup> Estimation trop approximative de la distance entre la lune au 1<sup>er</sup> contact et l'astre repère : On ne parle plus, ici, d'astre occulté. On ne l'exclut pas non plus. En fait, en —145 on n'a probablement pas eu d'astre occulté à sa disposition; en ce cas, il fallait faire la mesure au moyen d'une

---

(1) Cfr. Alm., 199.5 et 196.6.

(2) Cfr. Alm., 199.4 et 196.3.

(3) Alm., 200.8.

(4) Alm., 200.6-16.

(5) Cfr. Med. 28 18, fol. 132<sup>re</sup>.



sphère armillaire, et l'observation était faite à une dizaine de minutes près, si l'on suppose un astrolabe sphérique gradué en  $\frac{1}{6}$  de degré, et parfaitement construit et installé. En —134, on a probablement tiré parti de l'occultation de  $h$  de la Vierge. Mais alors on était victime de l'irradiation, qui faisait voir l'émergence seulement lorsque cette étoile de grandeur 5,4 était à plus de 8' du disque.

Il s'agissait aussi d'estimer le diamètre de la lune. Hipparque le faisait au moyen de la dioptré (<sup>1</sup>), instrument que Pappus trouve assez peu précis, et dont les renseignements, pour donner le diamètre, devaient être traités par une méthode graphique, si l'on peut en croire Pappus. Si l'on faisait appel à la table des cordes, Pappus fait remarquer qu'une interpolation proportionnelle est aussi cause d'erreur. Mais au degré d'approximation auquel les anciens observaient, cette dernière remarque est purement théorique. Ptolémée a préféré se servir d'éclipses de lune pour déterminer le diamètre. Hultsch estime qu'Hipparque assigne à la lune un diamètre moyen de 33'14". Cela ne nous apprend pas, même si c'était certain, quel diamètre Hipparque assignait à la lune au moment de l'éclipse de —134. Il était probablement trop fort. Nous avons vu p. 10 que le rayon de la lune devait être de 0°,24 au moment de l'éclipse de —134. On peut donc estimer que tout compris, Hipparque se trompait d'une dizaine de minutes dans la distance de la lune à l'étoile repère. Ici l'erreur ne pouvait jouer que dans un seul sens : écarter l'étoile-repère du point automnal, tandis qu'en —145 l'erreur de la sphère armillaire pouvait augmenter ou diminuer cette distance.

2<sup>e</sup> Théon ne parle pas de l'erreur qu'on pouvait commettre en estimant la course de la lune entre le 1<sup>er</sup> contact et le milieu de l'éclipse. Cette course n'est cependant pas oubliée : il en parle dans le texte que nous avons résumé ci-dessus pp. 6-7. Mais il ne dit pas comment on la calcule : on voit seulement qu'elle est déduite de l'heure observée du 1<sup>er</sup> contact. Utilisait-on, comme on le faisait pour la course du soleil, la vitesse moyenne, ou bien procédait-on, comme l'Almageste le demande, à un calcul de la vitesse horaire de la lune au moment de l'éclipse ? Par exemple, alors que la vitesse moyenne de la lune en longitude admise par Ptolémée est de 0°32'56" à l'heure, au moment de l'éclipse de —134, on lui assigne d'après les règles de l'Almageste une vitesse de 0°30'23", et au moment de l'éclipse de —145, une vitesse de 0°33'7".

La vitesse moyenne en longitude admise par Ptolémée est la même que celle d'Hipparque : cela se remarque rien qu'en juxtaposant le chapitre 1 du livre 3 et les chapitres 2 et 3 du livre 4 de l'Almageste. Si donc on a

---

(<sup>1</sup>) Cfr. PAPPUS, Commentaire sur l'Almageste, p. 99. — HULTSCH, Winkelmessungen durch die hipparchische Dioptra, dans *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, 9 (1899) pp. 193-209. — W. GUNDEL, Art. Mond, dans *Realencyclopädie*, t. XVI, col. 86.

pris la vitesse moyenne, la course de la lune en —145 a dû être estimée à  $1^{\circ}1'$ , ce qui est à peu près l'arc que font trouver les tables de P. V. Neugebauer :  $1^{\circ},04$  ; et en —134, à  $1^{\circ}3'$  ce qui est un peu trop fort, d'après les tables de P. V. Neugebauer, qui donnent :  $0^{\circ},92$ , à condition que l'on ait évalué exactement le temps qui s'est écoulé entre le 1<sup>er</sup> contact et le milieu. On pouvait facilement se tromper de 10 minutes temps en évaluant cet intervalle (qui est de près de deux heures dans les deux cas) : une erreur de 10 minutes temps entraînait une erreur de  $0^{\circ}5'$  arc.

3<sup>o</sup> La deuxième erreur possible signalée par Théon, git dans la mesure de la distance en longitude entre l'astre repère et l'Épi. Nous venons de parler de cette cause d'erreur il y a un instant. Elle agit ici une seconde fois, qui peut évidemment tout aussi bien contrebalancer la première, que l'exagérer.

4<sup>o</sup> On peut encore se tromper, dit Théon, dans la parallaxe de la lune. Delambre <sup>(1)</sup> connaissait déjà le texte de Pappus contenant des fragments d'Hipparque sur la distance de la lune et du soleil. Pappus, dirait-on, représente Hipparque indécis sur la question des parallaxes : au 1<sup>er</sup> livre « des grandeurs et des distances », il suppose que la terre est un point par rapport à la sphère du soleil ; donc, que le soleil n'a pas de parallaxe. Au 2<sup>e</sup> livre du même ouvrage, Hipparque se risque à estimer la distance du soleil à 2490 rayons terrestres <sup>(2)</sup>. De même pour l'éloignement de la lune, au 1<sup>er</sup> livre « des grandeurs et des distances » il admet un minimum de 71 rayons terrestres, un maximum de 83 et une moyenne de 77 ; mais à la fin du 1<sup>er</sup> livre « des grandeurs et des distances » il ajoute : « Dans ce » livre, nous sommes donc arrivés jusqu'à ce point-ci dans nos explications. Mais ne va pas conclure (lecteur) que nous avons déjà résolu en » tous points ce qui peut se dire au sujet de la distance de la lune : car » il reste encore en cette matière certaine considération qui va nous faire » trouver une distance de la lune moindre que celle qui vient d'être » calculée. » Et finalement, dans le deuxième livre « des grandeurs et des distances », Hipparque estime la distance de la lune à 62 rayons terrestres au minimum et  $67 \frac{1}{3}$  en moyenne. Pappus ajoute : et  $72 \frac{2}{3}$  au maximum.

Si l'on peut en juger par ces extraits, Hipparque n'est pas nécessairement hésitant ; il pourrait fort bien avoir établi une première approximation au 1<sup>er</sup> livre, et continué son calcul au 2<sup>e</sup>. Mais nous ne devons pas oublier que Pappus, auteur sérieux, a eu, ou tout au moins semble avoir

(1) DELAMBRE, op. cit., t. 2, p. 580. — Cfr. PAPPUS, op. cit., p. 68, et F. HULTSCH, Hipparchos über die Grösse und Entfernung der Sonne, dans *Berichte über die Verhandlungen der k. Sächsischen Gesellsch. der Wiss. Phil.-Hist. Kl.*, 52 (1900) p. 169-200.

(2) 2490 est une conjecture de Hultsch. Une partie des manuscrits n'ont conservé que 90, les meilleurs ont encore 490. — Cfr. HULTSCH, Hipparchos über die Grösse, p. 190 et PAPPUS, op. cit., p. 68, n. 1 (p. 69, li. 2 des notes lire 27 au lieu de 72).



eu, l'original d'Hipparque en mains. S'il le dit hésitant, il doit avoir des motifs de le dire.

Si Hipparque a hésité, a-t-il établi une table de la parallaxe, permettant de faire pratiquement le calcul, ou s'est-il obligé à recommencer chaque fois tout le calcul trigonométrique, à partir des données qui lui semblaient les plus vraisemblables au moment où il en avait besoin ? Le calcul de la parallaxe verticale, étant donné la distance en rayons terrestres de la lune à la terre, et la distance zénithale de la lune, est fort simple : on n'a qu'à suivre le bref raisonnement du livre 5 chap. 16 de l'Almageste, qui comporte seulement deux résolutions de triangles rectangles rectilignes. Seulement, lorsqu'Hipparque a rédigé son traité des parallaxes, savait-il résoudre un triangle rectiligne ? Chose paradoxale, il semble avoir su résoudre des triangles sphériques, à l'aide sans doute du théorème dit de Ménélas, lorsqu'il se trouvait encore désarmé devant un simple triangle rectiligne, dont une table des cordes lui donnait la solution par une réduction proportionnelle qui saute aux yeux. On sera plus disposé à admettre ce paradoxe si l'on considère que les Grecs n'ont jamais vu que cette réduction proportionnelle permet de résoudre un triangle quelconque : ils n'ont jamais abordé que des triangles rectilignes rectangles, pas les autres.

Nous connaissons par Ptolémée et par Pappus <sup>(1)</sup> quelques autres détails sur le traité des parallaxes d'Hipparque : ainsi, il cherchait la distance zénithale de la lune elle-même, et pas, comme Ptolémée, celle du point de l'écliptique ayant même longitude que la lune. Mais il s'était, paraît-il, quelque peu perdu dans ses raisonnements. Et, en outre, Pappus rapporte des détails qui semblent provenir du traité des parallaxes : ce sont eux qui nous ont fait demander si Hipparque savait déjà résoudre un triangle rectiligne lorsqu'il écrivait son traité des parallaxes.

Et comme d'ailleurs la table des cordes et le traité de trigonométrie d'Hipparque ont disparu, nous ne sommes pas capables de dire quelle valeur Hipparque avait assignée à la parallaxe de la lune au moment du 1<sup>er</sup> contact des deux éclipses.

Il est très facile de trouver quelle valeur l'Almageste assignerait à ces parallaxes <sup>(2)</sup>, mais cela ne nous apprend pas grand chose. Il est probable,

---

(1) PTOLÉMÉE, cfr. Alm., p. 450.11. — PAPPUS, *op. cit.*, p. 150.20. — et Premiers essais de trigonométrie rectiligne chez les Grecs, dans l'*Antiquité classique*, 2 (1933) p. 177-192 et en abrégé dans *Annales de la Soc. scient. de Bruxelles*, 52 (1932) série A, *Comptes rendus des séances*, p. 272-274.

(2) Par exemple, à Rhodes, au moment de l'éclipse de — 145 : au 1<sup>er</sup> contact, parallaxe en longitude 0°43'23" qui augmente la longitude ; au milieu 0°23'16" qui augmente la longitude ; au moment de l'éclipse de — 134, au 1<sup>er</sup> contact, parallaxe en longitude 0°3'12" qui augmente la longitude ; au milieu, 0°10'40" qui diminue la longitude. Voir ci-dessus, pp. 8 et 10, les valeurs obtenues au moyen de tables modernes.

mais cela n'est somme toute qu'une impression, que la principale cause d'erreur se trouve dans la parallaxe.

On doit même se demander si on en a tenu compte <sup>(1)</sup> : dans la mesure de la distance entre la lune et le soleil, puis entre la lune et une étoile, servant à mettre en évidence la précession des équinoxes <sup>(2)</sup>, la parallaxe est négligée complètement.

5° La dernière des causes d'erreurs énumérées par Théon réside dans l'estimation de la distance entre la lune et le point automnal, obtenue en calculant le chemin parcouru par le soleil entre le moment de l'équinoxe de printemps et le milieu de l'éclipse.

Cette erreur comprend d'abord l'erreur dans l'observation de l'équinoxe. Nous avons vu précédemment <sup>(3)</sup> que l'équinoxe de printemps de —145 était noté 12 heures trop tôt par Hipparque, tandis que celui de —134 l'avait été 10 heures trop tôt.

Ensuite, pour calculer le chemin du soleil, on partait de la vitesse moyenne du soleil, et pas de la vitesse qu'il possédait au moment de l'éclipse.

Et finalement, dans cette erreur intervient aussi l'erreur dans l'estimation de l'heure à laquelle s'est produite l'éclipse.

Le mouvement du soleil étant lent, toutes ces causes d'erreurs agissaient peu, et cela pouvait passer pour un bon subterfuge de calcul, d'utiliser le mouvement du soleil pour trouver la position de la lune.

Pourtant, le total de cette erreur semble avoir été assez considérable : supposant l'heure de l'éclipse bien notée, et comptant 0°59' pour le déplacement moyen journalier du soleil, en —145, on trouve pour la course du soleil entre le 24 mars vers 6 heures du matin, date de l'équinoxe d'après Hipparque, et le 21 avril vers 23 heures, date de l'éclipse à Alexandrie ou à Rhodes d'après nos tables, un arc de 27°15'17'', ce qui met la lune sur 207°15' au lieu de 207°38'2 (= 207°23') que nous avait fait trouver la table de Schoch. En utilisant simplement les tables d'éclipses de l'Almageste, on trouverait que la lune est sur 207°37' au moment de la syzygie vraie. Dans les mêmes conditions, en —134, on trouve pour la course du soleil jusque minuit de la nuit du 23-24 mars, où se place l'équinoxe d'après Hipparque, depuis le 21 mars vers 2 heures du matin, date de l'éclipse en Proche-Orient d'après nos tables, un arc de 1°52', ce qui met la lune au moment de l'éclipse sur 178°8' au lieu de 176.922 (= 176°55') que font trouver les tables modernes. En se fiant uniquement aux tables de l'Almageste, on trouverait 176°16'.

---

(1) Toutefois Ptolémée et Théon parlent de l'erreur commise dans la parallaxe et pas de l'erreur commise en négligeant la parallaxe.

(2) Alm. livre 7 chap. 2. Voir ci-après, p. 21.

(3) Voir ci-dessus, 1<sup>re</sup> partie du présent article, dans *Annales de la Soc. scient.*, 57 (1937) série I, p. 215, n. 3.



On dirait que c'est de cette dernière cause d'erreur qu'on s'est le plus délié. En tous cas, au livre 7 chapitre 2 de l'Almageste (<sup>1</sup>), pour montrer la variation de la longitude des étoiles due à la précession, la longitude du soleil est calculée d'après les tables, et non plus d'après une seule observation d'équinoxe, combinée avec la course moyenne ; la longitude de la lune (au 1<sup>er</sup> quartier) est évaluée en mesurant directement à l'astrolabe la distance lune-soleil ; et finalement, l'on mesure la distance entre la lune et une étoile. Le tout, comme nous l'avons signalé il y a un instant, sans tenir compte de la parallaxe ni de la réfraction.

En mettant ensemble tous ces éléments, nous n'arrivons pas à retrouver tout le détail des erreurs : certains points restent problématiques.

Il n'est pourtant pas superflu de grouper tous nos résultats :

Pour l'éclipse de —145 :

- 1<sup>o</sup> Distance de l'équinoxe à la lune au milieu de l'éclipse :  
on met la lune sur  $207^{\circ}15'$  au lieu de  $207^{\circ}23'$  soit  $0^{\circ}8'$  trop peu
- 2<sup>o</sup> Course de la lune entre le 1<sup>er</sup> contact et le milieu :  
semble avoir été calculée assez exactement ?  $0^{\circ}0'$
- 3<sup>o</sup> Parallaxe de la lune :  
nous ne savons pas quelle valeur lui a assigné Hipparque ?
- 4<sup>o</sup> Distance de la lune à l'étoile repère non occultée :  
l'erreur ordinaire des arcs mesurés à l'astrolabe  
soit au moins  $\pm 0^{\circ}10'$
- 5<sup>o</sup> Distance de l'étoile repère à l'Épi :  
même erreur qu'au précédent soit au moins  $\pm 0^{\circ}10'$   
En tout, on a placé l'Épi sur  $173^{\circ}30'$  au lieu de  $174^{\circ}4'$ , soit  $0^{\circ}34'$  trop peu.  
On voit que l'erreur s'est produite en faisant les diverses observations et les calculs d'une façon pas trop mauvaise.

---

(<sup>1</sup>) Alm., éd. Heiberg, vol. 2, p. 14.1. — Voir aussi MANITIUS, Ptolemäus Handbuch der Astronomie, Leipzig 1913, vol. 2, p. 13.

FOTHERINGHAM, The secular acceleration of the sun as determined from Hipparchus' equinox observations. *Monthly notices of the R. astr. soc.*, 78 (1918) p. 419, trouve que la façon habituelle de raconter la découverte de la précession ne doit pas être authentique : Hipparque aurait, dit-on, admis la précession pour expliquer que la longitude de l'Épi avait changé depuis le temps de Timocharis. Mais Hipparque ne pouvait pas accorder sa confiance à une méthode conduisant, d'après ses propres déclarations (qu'il fait dans le traité de la précession) à des résultats si discordants.

Il nous semble qu'on doit distinguer l'exposé qu'Hipparque fait de sa théorie, des recherches qui l'y ont conduit : il est très probable qu'il ne s'est pas contenté de mesurer une seule longitude d'étoile. En tous cas Ptolémée, à l'endroit que nous venons de citer, parle explicitement de mesurer la longitude de plusieurs étoiles. D'autre part, la méthode de mesure au chapitre de la précession, n'est pas identique à celle qui est suivie ici : on élimine la lune éclipsee, l'étoile occultée, et la position du soleil comptée à partir d'une seule observation d'équinoxe.

Pour l'éclipse de —134 :

- 1° Distance de l'équinoxe à la lune au milieu de l'éclipse :  
on met la lune sur  $178^{\circ}8'$  au lieu de  $176^{\circ}55'$  soit  $1^{\circ}13'$  de trop.
- 2° Course de la lune entre le 1<sup>er</sup> contact et le milieu :  
semble avoir été prise un peu trop longue, par exemple  
 $0^{\circ}5'$  de trop, ce qui diminue de  $0^{\circ}5'$  la longitude de la  
lune, soit  $0^{\circ}5'$  trop peu
- 3° Parallaxe de la lune : ?
- 4° Distance du centre de la lune à l'étoile repère :  
l'étoile repère vient d'être occultée ; en y comprenant  
une légère erreur sur le diamètre de la lune, on la  
compte comme sortant du disque lorsqu'elle est déjà  
à  $10'$  au moins du bord, soit donc  $0^{\circ}10'$  de trop
- 5° Distance de l'étoile repère à l'Épi :  
l'erreur ordinaire des observations à l'astrolabe, au  
moins  $\pm 0^{\circ}10'$ .

En tout, on a mis l'Épi sur  $174^{\circ}45'$  au lieu de  $174^{\circ}12'$ , soit  $0^{\circ}33'$  de trop.  
Les erreurs que nous pouvons chiffrer, soit  $1^{\circ}13' + 0^{\circ}10' - 0^{\circ}5'$ , ont  
donc été compensées en partie par des erreurs d'observation et de calcul  
de parallaxe. L'observation de —134 est donc beaucoup plus mauvaise,  
dans ses détails, que celle de —145, quoiqu'au bout du compte, elle arrive  
à n'être pas plus distante, par excès, du résultat exact, que la première  
ne l'était par défaut.

**16. But des observations d'Hipparque.** — Énumérons maintenant  
quelques conclusions qui semblent se dégager de ce qui précède.

Hipparque admet que la durée de l'année tropique est constante. Cela  
ressort de l'ensemble du chapitre que nous venons d'étudier dans Ptolé-  
mée et dans Théon. Ptolémée fait remarquer, entre autres choses <sup>(1)</sup>, que  
s'il avait admis une irrégularité, il aurait, conformément à l'usage,  
introduit une seconde anomalie du soleil, destinée à mettre la longitude  
calculée d'accord avec la longitude observée. Par parenthèse, puisque  
cette idée se dégage nettement de l'ensemble du chapitre, on ne peut pas  
dire <sup>(2)</sup> que Ptolémée prête à Hipparque des opinions qu'il n'a jamais  
soutenues, pour se donner le plaisir de les réfuter. Ptolémée pense  
qu'Hipparque a soulevé ces questions par honnêteté scientifique, pour  
mentionner aussi les faits qui semblaient donner un démenti à ses théories.

Ce qu'un ancien aurait appelé une irrégularité dans la durée de l'année,  
ce serait, par exemple, une variation de deux heures au moins : c'est ce

<sup>(1)</sup> Alm., 200.17.

<sup>(2)</sup> Cfr. TANNERY, Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne, Paris 1893,  
pp. 148 et 150.

chiffre que prend Ptolémée lorsqu'il veut donner un échantillon d'irrégularité qui se fait observable <sup>(1)</sup>. Savoir s'il y avait des irrégularités plus petites était complètement hors de leur horizon, puisqu'ils se rendaient bien compte qu'ils ne savaient pas de combien l'année était plus courte que  $365 \frac{1}{4}$  jours.

Hipparque donc ne se demandait pas quelle mécanique il allait adopter pour rendre compte de ces variations ; ou tout au moins, s'il a pu (disons même s'il a dû) par moment, lorsqu'il étudiait la question, songer à l'un ou l'autre arrangement, il ne s'y est pas arrêté, et c'est dépasser les textes pour tomber dans la conjecture, que de nous montrer un Hipparque pensant admettre une oscillation des points équinoxiaux <sup>(2)</sup>.

Tannery <sup>(3)</sup> a fait une hypothèse ingénieuse sur ces considérations d'Hipparque : On a pu constater, dans les pages qui précèdent, qu'une bonne partie de ces détails nous viennent du traité de la précession. Hipparque, suggère Tannery, aurait voulu montrer que même en mettant les choses au pire, il restait encore dans la longitude des étoiles une variation qui ne pouvait s'expliquer qu'en admettant la précession. L'on comprendrait en ce cas qu'Hipparque ait pris des résultats d'observations complètement aberrants et qu'il rejetait comme invraisemblables. Cette hypothèse ressemble à celle de Ptolémée que nous venons d'indiquer. Pour Tannery, le but d'Hipparque <sup>(4)</sup> aurait été de déterminer la limite inférieure de la fraction à retrancher à  $365 \frac{1}{4}$  jours pour trouver la longueur de l'année tropique. Nous ne voyons pas cela, ni dans Ptolémée, ni dans Théon, nos deux sources. Il nous semble qu'Hipparque a cherché à trouver le plus exactement possible la longueur de l'année tropique. Il n'y est pas arrivé de façon satisfaisante, ni Ptolémée non plus. Ce dernier le constate avec beaucoup de franchise, et sans chercher à jeter de la poudre aux yeux. C'est même cette façon d'exposer honnêtement les résultats auxquels on est parvenu, et d'espérer qu'un successeur fera mieux, qui fait le charme de cet intéressant chapitre.

Nos bases ne sont pas assez larges, dit-il en substance, pour arriver à des résultats satisfaisants. Mais nous essaierons une synthèse, et nous ne nous désintéresserons pas de la question. « Quant aux affirmations valables » pour toute l'éternité, ou bien même valables pour un temps considérablement plus grand que celui sur lequel portent les observations,

---

<sup>(1)</sup> Alm., 201.1-8.

<sup>(2)</sup> FOTHERINGHAM, The secular acceleration of the sun, dans *Monthly notices of R. A. S.*, 78 (1918) p. 407. L'oscillation en question ne serait pas la trépidation, mouvement à longue période, rejeté par Hipparque et Ptolémée, qui lui ont préféré la théorie de la précession. Fotheringham a repris ce nom pour désigner des fluctuations dans le mouvement du soleil.

<sup>(3)</sup> TANNERY, *Astronomie ancienne*, p. 150.

<sup>(4)</sup> Cfr. Alm., p. 207. — TANNERY, *op. cit.* 153.



» pensons bien qu'elles sont étrangères à l'amour du savoir et à l'amour de la vérité. » <sup>(1)</sup>

**17. La bonne foi de Ptolémée.** — φιλομάθειά τε καὶ φιλαλήθεια.  
« M. Marcot pense, et nous avons eu cette idée avant de lire ses remarques, dit Delambre, que ces observations sont supposées ou du moins qu'elles ont été calculées tout exprès de manière à donner la durée de l'année telle qu'on la connaissait. Il était bien maladroit d'altérer un intervalle si facile à vérifier ; il est plus naturel que Ptolémée ait calculé le temps de ses équinoxes par l'intervalle qu'il supposait ; alors il devait toujours retrouver la même année ; et s'il n'avait pas commis d'erreur sur l'intervalle, la supercherie n'eût jamais été découverte. Il s'est trompé. La fraude est reconnue... » <sup>(2)</sup>

Manitius <sup>(3)</sup> soupçonne Ptolémée de ne pas avoir observé les solstices, sans quoi il aurait vu qu'il devait admettre un mouvement de la ligne des apsides de son excentrique. C'est, nous semble-t-il, exiger trop de Ptolémée.

On dit souvent que le catalogue d'étoiles de l'Almageste est copié dans Hipparque, et que Ptolémée s'est contenté d'ajouter aux longitudes une

---

<sup>(1)</sup> Alm., 203.5-8. Ceci semble vouloir dire que les tables sont bonnes pour interpoler mais pas pour extrapoler. Si on la fait commencer à l'an 1 de Nabonassar, la table des mouvements du soleil s'arrête à 63 ans après J.-C., longtemps avant Ptolémée. Serait-elle reprise à Hipparque ? Mais en réalité cette table n'a pas de commencement défini : on doit ajouter, à la fin de l'addition, la position du soleil au 1 Thot de l'an 1 de Nabonassar. On pourrait ajouter la position du soleil à n'importe quel'e époque. Toutes les tables sont écrites en colonnes de 45 lignes c'est cela qui détermine sans doute le nombre de périodes de 18 ans qu'on peut y inscrire. La table des syzygies, qui procède par périodes de 25 ans, comme les « Tables faciles », s'arrête à 355 après J.-C.

<sup>(2)</sup> DELAMBRE, Histoire de l'astronomie ancienne, t. 2, p. 110. — Cfr. ci-dessus, n° 9 (dans la 1<sup>re</sup> partie du présent article, p. 226).

<sup>(3)</sup> MANITIUS. Ptolemäus Handbuch der Astronomie. Leipzig 1912, vol. I, p. 428, n. 23. Nous aurons probablement à revenir sur cette question. Mais rien qu'avec les éléments réunis dans le présent article, on entrevoit déjà la justification de Ptolémée. Manitius pense que Ptolémée ne pouvait manquer de voir que depuis Hipparque le printemps s'était raccourci et l'été allongé, ce qui l'aurait amené à admettre un mouvement de l'excentrique du soleil. Admettons les données de Manitius : Ptolémée place l'apogée du soleil sur Gémeaux 5°30', alors qu'il aurait dû trouver Gémeaux 10°22'. Il suffit de faire en sens inverse, et en utilisant les tables de l'Almageste, les calculs d'Alm., p. 235 (= Manitius, p. 168 sqq.) pour trouver que cette position de l'apogée correspond à un printemps durant environ 94 j. 8 h. et un été de 93 j, alors que Ptolémée admet que depuis Hipparque les saisons n'ont pas changé, et que le printemps a toujours 94 1/2 jours et l'été 92 1/2 jours. Le lecteur remarquera immédiatement qu'Hipparque ayant donné les dates d'équinoxe et de solstices à 6 h. près (cfr. 1<sup>re</sup> partie de cet article p. 217), Ptolémée donne ici, fort logiquement, les longueurs des saisons à 1/2 jour près. Mais comment veut on qu'il ait vu que le printemps s'était raccourci de 4 heures depuis Hipparque, s'il en connaissait la longueur, du temps d'Hipparque, à 12 heures près seulement ? Ceci en supposant que Ptolémée était capable d'observer les longueurs des saisons avec une approximation suffisante.

constante pour tenir compte de la précession. Fotheringham <sup>(1)</sup> signale que cette opinion est déjà réfutée par Laplace depuis 1824 ; on retrouve, sous-jacente aux données du catalogue d'étoiles, une erreur d'observation d'équinoxes correspondant à celle que Ptolémée a commise en +132. Évidemment ceci ne veut pas dire que Ptolémée a fait son catalogue d'étoiles sans tenir compte des travaux antérieurs. Mais cela semble indiquer qu'il ne faut pas trop se hâter de déclarer que Ptolémée ment lorsqu'il dit avoir fait des observations.

Il semble que la clef du procédé est fournie par une petite remarque faite en passant <sup>(2)</sup>, à la fin du chapitre 12 du 5<sup>e</sup> livre, tellement accidentelle que Pappus n'a pas cru devoir en dire un mot dans son commentaire : « Des nombreuses parallaxes que nous avons observées, (la lune étant) » dans des positions du genre (de celles qui ont été expliquées dans le » chapitre 12), de nouveau, nous allons en détailler une, au moyen de » laquelle nous donnerons à la fois un échantillon de la façon de calculer, » et nous établirons la preuve de ce qui suit dans l'ordre naturel des idées. »

Pour l'exposé, on choisit donc une observation ; mais on en a fait plusieurs. Le résultat dépend donc de l'ensemble des observations. La question est de savoir comment il en dépend, et quelle observation est choisie pour exposer la théorie.

Dans le cas présent, le résultat de Ptolémée, déduit de l'ensemble de sa documentation, est somme toute négatif : le degré d'approximation auquel il a pu arriver ne lui permet pas de dire de combien l'année tropique est plus courte que  $365 \frac{1}{4}$  jours <sup>(3)</sup>. Il constate seulement qu'elle est plus courte. Dans ces conditions, il pense sans doute qu'il n'y a aucun avantage à changer les données d'Hipparque : l'approximation qu'il proposerait serait tout aussi mauvaise que l'autre, et après tout, l'on pourrait aussi bien écrire n'importe quelle autre fraction restant entre les limites des résultats d'observation <sup>(4)</sup>. Hipparque prend  $\frac{1}{300}$  de jour <sup>(5)</sup>. Ptolémée adopte donc ces chiffres-là.

---

<sup>(1)</sup> FOTHERINGHAM, *The Secular acceleration of the sun*, p. 422. Cfr. un reproche analogue émanant de Newcomb réfuté par FOTHERINGHAM et LONGBOTTOM, *The Secular acceleration of the moon's mean motion* dans *Monthly notices* 75 (1915), p. 378.

<sup>(2)</sup> Alm., 408, 5-9.

<sup>(3)</sup> Alm., 201, 32-202, 9.

<sup>(4)</sup> Il est curieux de mettre à côté de ces constatations la phrase suivante de P. GOEDSEELS, *Théorie des erreurs d'observation et éléments du calcul des probabilités*. Paris 1914, p. 18 : « Le livre précité de M. Colardeau contient de nombreux passages » confirmant nos idées et celles de M. Estienne. Nous lisons notamment, à la p. 176, à » propos des cinq résultats suivants : 0,05739 ; 0,05691 ; 0,05685 ; 0,05679 ; 0,05712, que » les deux derniers chiffres décimaux, ne correspondent à rien de réel et que des » chiffres quelconques, mis à leur place seraient tout aussi bons. »

<sup>(5)</sup> Alm., p. 207.

Lorsqu'il s'agit ensuite d'exposer sa théorie, le procédé ordinaire est appliqué : Ptolémée a toute une série d'observations : il en choisit l'une ou l'autre. Mais comme la fraction d'Hipparque est au moins deux fois trop petite (0,00333... au lieu, d'après la formule de Schoch, de 0,00751512... pour l'époque d'Hipparque, et 0,00757014... pour l'époque de Ptolémée), il se fait que les échantillons que Ptolémée choisit se trouvent, non pas aux environs de la moyenne de ses résultats, mais du côté des extrêmes. C'est choisir arbitrairement, si l'on veut. Mais ce n'est pas inventer des observations qu'on n'a pas faites, et cela ne peut pas s'appeler une supercherie : c'est l'application logique d'un procédé dont le principe se trouve clairement énoncé ailleurs, et qui n'avait probablement pas besoin d'être énoncé, parce qu'il était entendu que pour exposer clairement ses résultats, il fallait élaguer le détail des nombreuses observations et de tous les tâtonnements dont on était parti.

---



# Contributions à la théorie des effets de latitude et d'asymétrie des rayons cosmiques

---

## V. — Détermination des exposants caractéristiques des trajectoires périodiques

PAR

**ODON GODART**

---

### INTRODUCTION

Parmi les trajectoires de particules chargées déviées par le champ magnétique terrestre, les trajectoires asymptotiques aux orbites périodiques forment, au point de rencontre avec la terre, le cône appelé de première espèce dans les contributions précédentes. Ce cône sépare les orbites venant de l'infini de celles venant de la terre. La connaissance des orbites asymptotiques détermine donc la répartition du rayonnement cosmique.

Dans la contribution IV <sup>(1)</sup>, MM. les professeurs Lemaître et Vallarta ont mis au point une méthode d'intégration numérique des trajectoires asymptotiques, lorsqu'on les connaît déjà dans les environs immédiats de l'orbite périodique. Cette détermination préliminaire est le sujet de la présente contribution.

Nous avons dans une première partie calculé neuf orbites périodiques, puis déterminé les exposants caractéristiques et les solutions des équations aux variations de six d'entre elles. Cette première partie fut présentée comme dissertation de licence en sciences mathématiques en 1935. La méthode employée fut reprise pour le calcul d'une famille de trajectoires asymptotiques par MM. Lemaître et Vallarta <sup>(1)</sup>.

La deuxième partie comprend la réduction des équations aux variations à une seule équation à coefficient périodique, équation que Hill a étudiée dans son mémoire sur le mouvement du périégée de la lune <sup>(2)</sup>. Nous

---

<sup>(1)</sup> *Ann. Soc. Sc.*, A, 56, 1936, p. 102.

<sup>(2)</sup> *Acta mathematica*, 8, 1886, p. 1 et WHITTAKER et WATSON, *Course of Modern Analysis*, p. 414.

rappelons succinctement cette théorie et l'appliquons à la détermination des exposants caractéristiques des orbites périodiques.

La troisième partie consiste en la détermination de l'orbite périodique limite exacte et de la solution des équations aux variations.

## PREMIÈRE PARTIE

### ORBITES PÉRIODIQUES ET VOISINES DES PÉRIODIQUES

#### § 1. — *Orbites périodiques*

Les équations auxquelles obéissent les particules cosmiques, sont dans un plan méridien accompagnant la particule

$$(1) \quad \frac{d^2x}{d\sigma^2} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{d^2\lambda}{d\sigma^2} = \frac{\partial P}{\partial \lambda},$$

$$(2) \quad \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{d\sigma}\right)^2 = 2P = \frac{e^{2x}}{16\gamma_1^4} + 2e^{-x} - e^{-2x} \cos^2\lambda - \frac{1}{\cos^2\lambda},$$

où  $\gamma_1$  est le paramètre de Störmer donnant la valeur du moment de la quantité de mouvement à l'infini ;  $\sigma$  une variable indépendante liée au temps ;  $\lambda$  la latitude et où

$$e^x = 2\gamma_1 r,$$

$r$  étant la distance de la particule au centre de la terre.

Connaissant  $x$  et  $\lambda$ , il nous est possible de déterminer la longitude  $\varphi$  par

$$(3) \quad \frac{d\varphi}{d\sigma} = e^{-x} - \frac{1}{\cos^2\lambda}.$$

M. Lemaître a exposé dans la contribution III <sup>(1)</sup> et repris dans la contribution IV, une méthode permettant de calculer les solutions périodiques en se donnant la valeur d'un paramètre  $\eta$ . Lorsque  $\eta$  augmente,  $\gamma_1$  diminue jusqu'à un minimum pour augmenter de nouveau.

Les orbites périodiques pour les valeurs de  $\eta$  inférieures à celle correspondante à la valeur limite de  $\gamma_1$  sont instables. Les autres orbites sont évidemment stables et n'admettent donc pas de trajectoires asymptotiques.

Nous avons donné à  $\eta$  les valeurs :

$$0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,06; 0,07$$

et étudié ainsi des orbites périodiques choisies dans toute la zone d'instabilité.

<sup>(1)</sup> *Ann. Soc. Sc.*, A, 54, 1934, p. 194.

Nous avons déterminé ces solutions sous la forme de séries de Fourier

$$\begin{aligned}x &= x_0 + x_2 C_2 + x_4 C_4 + \dots \\ \lambda &= \mu_1 S_1 + \mu_3 S_3 + \mu_5 S_5 + \dots\end{aligned}$$

où

$$C_k = \cos k (\omega \sigma + \varphi), \quad S_k = \sin k (\omega \sigma + \varphi),$$

$\omega$  étant une constante différente pour chaque orbite périodique, et  $\varphi$  une constante arbitraire.

La méthode de M. Lemaître s'est révélée très précise pour le calcul de  $\lambda$  déterminé toujours avec 5 décimales exactes. Le calcul de  $x$  a nécessité pour les plus grandes valeurs de  $\eta$  des corrections effectuées comme il est indiqué dans la contribution IV, corrections atteignant la cinquième décimale.

Dans le tableau des résultats figurent, en outre des constantes déjà définies,  $r_0$  valeur de  $r$  pour  $\sigma = 0$ ,  $z_1$  et  $\psi_1$  constantes telles que

$$\sin \lambda = \sqrt{z_1} \sin [\omega \sigma + \psi_1 \sin 2 \omega \sigma].$$

TABLEAU I

$\eta$	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
$\Upsilon_1$	0,964.953	0,929.898	0,895.050	0,860,846	0,828.245	0,799.998	0,792.071
$r_0$	0,973.854	0,945.009	0,912.620	0,875.311	0,820.479	0,772.002	0,670.358
$\omega$	0,879.678	0,892.772	0,904 745	0,914 183	0,918.451	0,910.632	0,857.387
$\psi_1$	— 2.293	— 5.040	— 8.470	— 12.889	— 18.948	— 28.151	— 47.814
$z_1$	46.528	92.712	0,138.364	0,183.159	0,226.391	0,266.149	0,292 210
$x_0$	0,632.910	0,567.971	0,497.734	0,420.653	0,334.620	0,234.97	0,102.14
$x_2$	— 1.933	— 4.063	— 6.898	— 10.521	— 15.672	— 23.74	— 42.04
$\mu_1$	0,216.729	0,307.351	0,377.126	0,435.595	0,485.726	0,527.13	0,548.56
$\mu_3$	— .677	— 2.018	— 3.933	— 6.478	— 9.814	— 14 31	— 21.45
$\mu_5$	3	24	72	164	319	57	1.02
$\mu_7$			— 2	— 7	— 14	— 3	— 73

La détermination de l'orbite périodique limite exposée dans la troisième partie nous a amené à calculer deux orbites : l'une est près de l'orbite limite ; l'autre où  $\eta = 0,067.551$  est la véritable orbite limite. Nous publions ces deux résultats dans un second tableau entre deux approximations de l'orbite limite calculées par M. Lemaître.



TABLEAU II

$\eta$	0,067.512	0,067.526	0,067.551	0,067.682
$r_1$	0,788.545	0,788.544	0,788.541	0,788.560
$r_0$	0,705.896	0,705.775	0,705.495	0,703.392
$w$	0,881.763	0,881.676	0,881.517	0,880.535
$\psi_1$	— 40.433	— 40.458	— 40.510	— 40.832
$z_1$	0,289.248	0,289.278	0,289.332	0,289.587
$x_0$	0,142.284	0,142.103	0,141.779	0,139.828
$x_2$	— 34.970	— 34.987	— 35.047	— 35.341
$x_4$	— 16	— 16	— 16	— 20
$\mu_1$	0,547.790	0,547.805	0,547.847	0,547.991
$\mu_3$	— 19.118	— 19.155	— 19.174	— 19.279
$\mu_5$	875	875	877	884
$\mu_7$	— 60	— 60	— 60	— 60
$\mu_9$	3	4	5	6

## § 2. — *Forme de la solution des équations aux variations*

Remarquons que les équations (1) peuvent se mettre sous la forme canonique en considérant l'hamiltonien :

$$H \equiv P - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dx}{d\sigma} \right)^2 + \left( \frac{d\lambda}{d\sigma} \right)^2 \right].$$

D'après la théorie des exposants caractéristiques <sup>(1)</sup>, les solutions périodiques des équations (1) admettent des exposants caractéristiques égaux et de signe contraire ; de plus, deux d'entre eux sont nuls, car il existe l'intégrale  $H = 0$ .

Si nous posons

$$x = \xi + \xi_1, \quad \lambda = \eta + \eta_1, \quad (2)$$

où  $\xi$  et  $\eta$  sont les solutions périodiques,  $\xi_1$  et  $\eta_1$  des quantités petites telles que nous pouvons négliger le carré. Les équations aux variations s'écrivent :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \xi_1}{d\sigma^2} = \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) \xi_1 + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial \lambda} \right) \eta_1 \\ \frac{d^2 \eta_1}{d\sigma^2} = \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial \lambda} \right) \xi_1 + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} \right) \eta_1 \end{cases}$$

$$(5) \quad \frac{d\xi}{d\sigma} \cdot \frac{d\xi_1}{d\sigma} + \frac{d\eta}{d\sigma} \cdot \frac{d\eta_1}{d\sigma} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) \xi_1 + \left( \frac{\partial P}{\partial \lambda} \right) \eta_1$$

<sup>(1)</sup> POINCARÉ, Méthodes nouvelles de mécanique céleste, tome I, p. 162.

<sup>(2)</sup>  $\eta$  sera dorénavant employé dans ce sens.

où les parenthèses signifient qu'il faut remplacer dans ces expressions  $x$  par  $\xi$  et  $\lambda$  par  $\eta$ .

Nous les avons calculées de  $15^\circ$  en  $15^\circ$  et nous en avons fait l'analyse harmonique. Nous avons pu écrire ainsi

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right) &= a_0 + a_2 C_2 + a_4 C_4 + \dots \\ (6) \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial \lambda}\right) &= c_1 S_1 + c_3 S_3 + c_5 S_5 + \dots \\ \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2}\right) &= b_0 + b_2 C_2 + b_4 C_4 + \dots \end{aligned}$$

Outre la solution banale

$$\xi_1 = \frac{d\xi}{d\sigma} \quad \eta_1 = \frac{d\eta}{d\sigma},$$

les équations (3) admettent des solutions de la forme

$$\begin{aligned} (7) \quad \xi_1 &= e^{\Omega\sigma} \sum [y_k S_k + z_k C_k], \quad k \text{ pair}; \\ \eta_1 &= e^{\Omega\sigma} \sum [\mu_k S_k + \nu_k C_k], \quad k \text{ impair}. \end{aligned}$$

### § 3. — Calcul de l'exposant caractéristique

Introduisons les expressions (6) et (7) dans les équations du mouvement; effectuons les dérivations, les produits de sinus et de cosinus. Comme cette relation doit être vérifiée pour toute valeur de  $\sigma$ , les coefficients des  $S_k$  et  $C_k$  doivent être égaux dans les deux membres. Nous avons multiplié les équations par 2 pour simplifier les écritures.

$$\begin{array}{rclclcl} 2(A_0 - \Omega^2)z_0 & + C_0 & \mu_1 + D_0 & z_2 & \dots & = 0 \\ & (A_1 - 2\Omega^2)\nu_1 - B_1\Omega & \mu_1 & & + C_2 y_2 & \dots = 0 \\ 2C_0 & z_0 + B_1\Omega & \nu_1 + (A_2 - 2\Omega^2)\mu_1 + C_1 & z_2 & \dots & = 0 \\ 2D_0 & z_0 & + C_1 & \mu_1 + (A_3 - 2\Omega^2)z_2 - & 2B_1\Omega y_2 & \dots = 0 \\ & + C_2 & \nu_1 & + & 2B_1\Omega z_2 + (A_4 - 2\Omega^2)y_2 & \dots = 0 \\ . & . & . & . & . & \dots = 0 \end{array}$$

où

$$\begin{array}{lll} A_0 = a_0 & C_0 = c_1 & D_0 = a_2 \quad B_1 = 4w \\ A_1 = 2b_0 + b_2 + 2w^2 & C_1 = -c_1 + c_3 & D_1 = b_2 + b_4 \\ A_2 = 2b_0 - b_2 + 2w^2 & C_2 = c_1 + c_3 & D_2 = b_2 - b_4 \\ A_3 = 2a_0 + a_4 + 8w^2 & & \\ A_4 = 2a_0 - a_4 + 8w^2 & & \end{array}$$

La condition de compatibilité de ces équations linéaires homogènes se met sous la forme d'un déterminant infini égalé à 0.

Celui-ci donne une équation en  $\Omega$ . Nous pouvons la résoudre par approximations successives de la manière suivante. Arrêtons-nous au déterminant formé par les 5 premières lignes et colonnes, et développons le, suivant les mineurs de la première ligne et de la première colonne, nous obtenons l'expression

$$(9) \quad A_0 - \Omega^2 = \frac{1}{\Delta_1} (C_0^2 \Delta_2 + D_0^2 \Delta_3 - 2C_0 D_0 \Delta_4)$$

où les mineurs  $\Delta$  sont des fonctions de  $\Omega$ .

Une première approximation se détermine par itération au moyen de la formule ci-dessus. On prend comme première valeur de  $\Omega^2$ ,  $A_0$  et on calcule les valeurs des  $\Delta$ ; l'équation (9) donne une deuxième valeur au moyen de laquelle on calcule les  $\Delta$ , et ainsi de suite.

Ce procédé converge rapidement.

Les mineurs de ce déterminant par rapport aux éléments de la première ligne nous donnent les valeurs approchées de  $z_0, \mu_1, \nu_1, y_2, z_2$ . Portons ces valeurs dans les deux équations suivantes arrêtées aux termes en  $\mu_3$  et  $\nu_3$ . Nous pourrions résoudre par rapport à  $\nu_3$  et  $\mu_3$ . En introduisant ces valeurs dans la première équation, nous obtiendrions une nouvelle approximation de  $\Omega^2$ . Nous pourrions calculer de nouvelles valeurs de  $\mu_1, \nu_1, y_2, z_2; \mu_3, \nu_3$ . Lorsque ces valeurs auront convergé, le même procédé se continuera avec les deux équations suivantes, et ainsi de suite.

Ce calcul a été effectué pour les 6 premières orbites du tableau I. Les résultats sont publiés dans les tableaux III et IV à la fin de la contribution. L'exposant caractéristique obtenu par cette méthode est écrit  $\Omega_1$ . Nous avons toujours posé  $z_0 = 0,5$ .

Cette méthode devient extrêmement pénible quand on s'approche de l'orbite limite; les résultats deviennent incertains, car il est nécessaire de calculer des termes de plus en plus loin dans le développement de  $\xi_1, \eta_1$ . Aussi nous avons été amené à chercher une vérification de nos calculs. Cette vérification fut trouvée dans l'application des méthodes de Hill à notre problème.

## DEUXIÈME PARTIE

### APPLICATION DE LA MÉTHODE DE HILL

#### § 4. — *Déplacement normal à l'orbite périodique*

La théorie de Hill donne pour un degré de liberté une détermination de l'exposant caractéristique à la fois plus rigoureuse et plus simple que la méthode d'approximation précédente. La généralisation de cette méthode à un système de  $n$  équations linéaires homogènes du second



ordre à  $n$  inconnues à coefficients périodiques est aisée. Elle fut réalisée par M. Lemaître et par l'auteur et présentée à l'Académie Royale de Belgique le 8 janvier 1938 (<sup>1</sup>). Nous pouvions donc appliquer les idées de Hill aux équations (3).

Mais il a paru préférable, pour simplifier les calculs numériques, de ramener les équations aux variations à l'équation originelle de Hill.

Posons

$$\frac{1}{\omega^2} \left( \frac{\partial^{m+n} P}{\partial x^m \partial \lambda^n} \right)_{x=\xi, \lambda=\eta} = P_{m,n} \quad \frac{1}{\omega^m} \frac{d^m \xi}{d\sigma^m} = \xi^{(m)}$$

Les équations aux variations deviennent

$$(10) \quad \begin{aligned} \xi_1'' &= P_{20} \xi_1 + P_{11} \eta_1 \\ \eta_1'' &= P_{11} \xi_1 + P_{02} \eta_1 \end{aligned}$$

avec la condition d'énergie

$$(11) \quad \xi' \xi_1' + \eta' \eta_1' = P_{10} \xi_1 + P_{01} \eta_1$$

L'écart  $\xi_1, \eta_1$  à l'orbite périodique peut se décomposer en déplacement tangentiel  $u$  et en déplacement normal  $v$ , par les formules

$$(12) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \xi' u - \eta' v \\ \eta_1 &= \eta' u + \xi' v \end{aligned}$$

La condition d'énergie donne

$$(13) \quad (\xi'^2 + \eta'^2) u' = 2 (\xi' P_{01} - \eta' P_{10}) v$$

Multiplions les équations aux variations (10) respectivement par  $\eta'$  et  $\xi'$  ajoutons-les, et remplaçons  $\xi_1, \eta_1, u'$  par leurs expressions tirées de (12) et (13) nous obtenons

$$(\eta'^2 + \xi'^2) v'' + 2 (\eta' \eta'' + \xi' \xi'') v' + [4 P_{11} \xi' \eta' + 4 \left( \frac{\xi' \eta'' - \eta' \xi''}{P} \right)^2 + (\xi'^2 + \eta'^2) (P_{20} - P_{02})] v = 0$$

Pour faire disparaître la dérivée première posons

$$v = w (\xi'^2 + \eta'^2)^{\frac{1}{2}}$$

Ce qui revient à faire la transformation

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi' u - \beta w \\ \eta_1 = \eta' u + \alpha w \end{cases}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les cosinus directeurs de l'orbite périodique.

(<sup>1</sup>) *Bull. Ac. roy. Belg. (Classe des Sciences)* 1, 1938, p. 19.

L'équation du déplacement tangentiel devient

$$(14) \quad u' = 2 \frac{(\xi'\eta'' - \eta'\xi'')}{(\xi'^2 + \eta'^2)^{\frac{3}{2}}} w \equiv \frac{2w}{R}.$$

Nous représentons par  $R$  le rayon de courbure de l'orbite périodique.

Remarquant que

$$\beta' = -\frac{\xi'}{R} \quad \alpha' = \frac{\eta'}{R},$$

l'équation du déplacement normal devient

$$(15) \quad w'' + [3(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2 + 2\alpha\beta P_{11} - \alpha^2 P_{02} - \beta^2 P_{20}] w = 0$$

Introduisons l'angle  $\chi$  que fait la tangente à l'orbite périodique avec l'axe des  $\lambda$ , l'équation (15) peut s'écrire :

$$w'' + [3\chi'^2 + \sin 2\chi P_{11} - \sin^2 \chi P_{02} - \cos^2 \chi P_{20}] w = 0$$

L'équation (14) n'a pas d'infini au point  $w\sigma = \frac{\pi}{2}$  pour lequel  $\xi'$  et  $\eta'$  s'annulent. En effet, la règle de l'Hospital donne en ce point une vraie valeur finie

$$\left(\frac{1}{R}\right)_{\frac{\pi}{2}} = \left[ \frac{(\alpha^2 - \beta^2) P_{11} + \alpha\beta (P_{02} - P_{20})}{3(\alpha P_{10} + \beta P_{01})} \right]_{\frac{\pi}{2}}$$

$\frac{1}{R}$  peut se calculer de 15 en 15° et l'analyse harmonique en donne la valeur en série de Fourier.

Appelons  $\Theta$  le coefficient de  $w$  dans l'équation du déplacement normal.

Pour le déterminer calculons  $\chi = \arctg \frac{\xi'}{\eta'}$ ,  $\sin \chi$ ,  $\cos \chi$  de 15° en 15° ;

$P_{20}$ ,  $P_{02}$ ,  $P_{11}$  ont été déterminés dans la première partie ;  $\frac{d\chi}{d\sigma}$  s'obtient par dérivation de l'analyse harmonique de  $\chi$ .

Les coefficients de  $\Theta$  développés en série de Fourier sous la forme

$$(16) \quad \Theta = \theta_0 + 2\theta_2 C_2 + 2\theta_4 C_4 + \dots$$

sont publiés dans le tableau III.

### § 5. — Détermination de l'exposant caractéristique

L'équation (15) étant une équation linéaire à coefficient périodique, elle admet des solutions de la forme

$$w = e^{\Omega\sigma} (w_0 + 2w_2 C_2 + 2w_4 C_4 + \dots)$$

$u$  déduit de (14) par quadrature est de la même forme et, par conséquent,  $\xi_1$  et  $\eta_1$ . Donc  $\Omega$  est l'exposant caractéristique de l'orbite périodique correspondante. La solution banale  $\xi_1 = \xi'$ ,  $\eta_1 = \eta'$  est donnée par  $w \equiv 0$ .

L'équation (15) du déplacement normal est de la même forme que l'équation considérée par Hill. Nous croyons bon de rappeler succinctement la théorie de Hill.

Posons  $\Omega = i\nu w$ ,  
et employons la notation imaginaire

$$\Theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \theta_{2n} e^{2n i \omega \sigma}$$

$$w = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_{2n} e^{(2n+\nu) i \omega \sigma}.$$

En introduisant dans les équations, on a pour chaque  $e^{(2n+\nu) i \omega \sigma}$

$$(\nu + 2n)^2 w_{2n} - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \theta_{2n-2l} w_{2l} = 0.$$

L'élimination des  $w$  donne un déterminant infini  $\Delta(\nu) = 0$ , dont les termes sont

$$A_{n..n} = (\nu + 2n)^2 - \theta_0, \quad A_{m..n} = -\theta_{m-n} \quad (m \neq n).$$

En divisant chaque ligne du déterminant précédent par le terme de la diagonale principale, on construit un nouveau déterminant  $\Delta_1(\nu)$  dont les termes sont

$$B_{n..n} = 1, \quad B_{m..n} = -\frac{\theta_{m-n}}{(\nu + 2n)^2 - \theta_0} \quad (m \neq n).$$

Ce déterminant converge, car le produit des termes de la diagonale principale est 1, et la somme des termes hors de la diagonale principale converge absolument.

On voit aisément que  $\Delta_1(\nu)$  est une fonction périodique paire de période égale à 2, qu'elle est une fonction analytique de  $\nu$  excepté à ces pôles  $\nu = -r \pm \sqrt{\theta_0}$  et qu'elle tend vers l'unité quand  $\nu$  tend vers l'infini par valeurs imaginaires.

Appliquant le théorème de Liouville, on a

$$1 + k [\cotg \pi (\theta_s + \nu) + \cotg \pi (\theta_s - \nu)] \equiv \Delta_1(\nu) = 0.$$

Si nous connaissons  $\Delta_1$  pour une valeur quelconque attribuée à  $\nu$   $k$  peut être déterminé.

Posons  $\nu = 0$ , nous obtenons l'équation  $\Delta_1(\nu) = 0$  sous la forme

$$\frac{\sin^2 \frac{\pi}{2} \nu}{\sin^2 \frac{\pi}{2} \sqrt{\theta_0}} = \Delta_1(o).$$



§ 6. — Calcul de  $\Delta_1(o)$

Écrivons les termes de  $\Delta_1(o)$  en prenant successivement la diagonale principale, tous les termes ayant 2 éléments hors de la diagonale principale, puis 3, 4, etc... Nous obtiendrons ainsi  $\Delta_1(o)$  en série potentielle convergente des  $\theta$ .

Soient  $n, n', n'' \dots$  des entiers écrits en grandeur algébrique décroissante et écrivons, pour simplifier  $[n] = (2n)^2 - \theta_0$

$$\begin{aligned} \Delta_1(o) = & 1 - \sum \frac{\theta_{n'-n}^2}{[n][n']} \\ & - 2\sum \frac{\theta_{n'-n} \theta_{n''-n'} \theta_{n-n''}}{[n][n'][n'']} - 2\sum \left\{ \frac{\theta_{n'-n} \theta_{n''-n'} \theta_{n'''-n''} \theta_{n-n'''} + \theta_{n''-n'} \theta_{n'-n''} \theta_{n'''-n'} \theta_{n-n'''} + \theta_{n'-n} \theta_{n''-n} \theta_{n'''-n} \theta_{n'''-n''}}{[n][n'][n''][n''']} \right\} \\ & + \sum \frac{\theta_{n'-n}^2 \theta_{n''-n''}^2}{[n][n'][n''][n''']} \\ & + 2\sum \left\{ \frac{\theta_{n'-n} \theta_{n'''-n''}^2 \theta_{n^{IV}-n} \theta_{n^{IV}-n'}}{[n][n'][n''][n'''][n^{IV}]} + \frac{\theta_{n'-n}^2 \theta_{n'''-n''} \theta_{n^{IV}-n''} \theta_{n^{IV}-n'''}}{[n][n'][n''][n'''][n^{IV}]} \right\} \\ & - \sum \frac{\theta_{n'-n}^2 \theta_{n'''-n''}^2 \theta_{n^{IV}-n^{IV}}^2}{[n][n'][n''][n'''][n^{IV}][n^V]} \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

où les  $\Sigma$  s'étendent pour tous les  $n$  de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

Il est possible d'écrire ces sommations sous forme finie.

Isolons par exemple le terme  $\theta_k^2$ , il a pour coefficient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[n][n+k]}.$$

Posons  $\theta_0 = 4\theta^2$  et définissons les constantes A, B, C, D, telles que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[n][n+k]} = \frac{1}{16} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{\theta+n} + \frac{B}{\theta-n} + \frac{C}{\theta+n+k} + \frac{D}{\theta-n-k}.$$

Mais nous savons que

$$\sum \frac{1}{\theta+n} = \sum \frac{1}{\theta-n} = \sum \frac{1}{\theta+n+k} = \sum \frac{1}{\theta-n-k} = \pi \cotg \pi \theta,$$

d'où

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[n][n+k]} = \frac{1}{16} (A+B+C+D) \pi \cotg \pi \theta = \frac{\pi \cotg \frac{\pi}{2} \sqrt{\theta_0}}{4\sqrt{\theta_0} (\theta_0 - k^2)}.$$

Nous pouvons déterminer de même toutes les sommations simples.  
Pour les sommations doubles, par exemple,

$$\sum_{n, n' = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{[n][n+k][n'][n'+k']}$$

substituons à  $n'$ ,  $n+k''$  et procédons comme précédemment en considérant d'abord  $k''$  comme constante,

$$\sum \frac{1}{[n][n+k][n'][n'+k']} = \sum \frac{A}{\theta+n} + \frac{B}{\theta-n} + \frac{C}{\theta+n+k} +$$

$$+ \frac{D}{\theta-n-k} + \frac{E}{\theta+n+k''} + \frac{F}{\theta-n-k''} + \frac{G}{\theta+n+k''+k'} + \frac{H}{\theta-n-k''-k'}.$$

Les coefficients A, B, C, D, E, F, G, H contiendront  $k''$ . Nous devons faire la somme de ces coefficients pour  $k''$  variant de 0 à  $+\infty$  excepté  $k''=0$ ,  $k''=k$ . Si nous faisons cette somme de 0 à  $+\infty$ , nous obtenons une expression en  $\cotg \pi \sqrt{\theta_0}$  de laquelle nous devons soustraire les termes à négliger.

Cette méthode peut s'étendre à une sommation de n'importe quel ordre de multiplicité.

Nous nous sommes arrêtés dans l'expression du développement aux termes non négligeables à la cinquième décimale dans le cas le plus défavorable.

$$\Delta_1(o) = 1 + \frac{\pi \cotg \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\theta_0} \right)}{4\sqrt{\theta_0}} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\theta_2^2}{1-\theta_0} + \frac{\theta_4^2}{4-\theta_0} \\ & \frac{3\theta_2^2\theta_4}{2(1-\theta_0)(4-\theta_0)} + \frac{(7-3\theta_0)\theta_2\theta_4\theta_6}{(1-\theta_0)(4-\theta_0)(9-\theta_0)} + \frac{5\theta_2^3\theta_6}{4(1-\theta_0)(4-\theta_0)(9-\theta_0)} \\ & \left[ \frac{\pi \cotg(\pi \sqrt{\theta_0})}{\sqrt{\theta_0}} - \frac{1}{\theta_0} + \frac{2}{1-\theta_0} + \frac{9}{2(4-\theta_0)} \right] \frac{\theta_2^4}{8(1-\theta_0)^2} \\ & \left[ \frac{\pi \cotg(\pi \sqrt{\theta_0})}{\sqrt{\theta_0}} - \frac{1}{\theta_0} + \frac{2}{1-\theta_0} + \frac{2}{4-\theta_0} + \frac{10}{9-\theta_0} \right] \frac{\theta_2^2\theta_4^2}{4(1-\theta_0)(4-\theta_0)} \\ & \left[ \frac{\pi \cotg(\pi \sqrt{\theta_0})}{\sqrt{\theta_0}} - \frac{1}{\theta_0} + \frac{2}{1-\theta_0} + \frac{2}{4-\theta_0} + \frac{9}{2(4-\theta_0)} \right] \frac{3\theta_2^4\theta_4}{8(1-\theta_0)^2(4-\theta_0)} \\ & \left\{ \left[ -\frac{1}{\theta_0} + \frac{2}{1-\theta_0} + \frac{9}{2(4-\theta_0)} \right] \frac{\pi \cotg(\pi \sqrt{\theta_0})}{\sqrt{\theta_0}} \right. \\ & \quad \left. - \frac{25}{8\theta_0} + \frac{1}{\theta_0^2} + \frac{2}{1-\theta_0} + \frac{4}{(1-\theta_0)^2} - \frac{9}{8(4-\theta_0)} + \frac{9}{(4-\theta_0)^2} - \frac{4}{9-\theta_0} - \frac{\pi^2}{3\theta_0} \right\} \theta_2^6 \end{aligned} \right.$$

Les résultats de ces calculs sont publiés sous la notation  $\Omega_2$  dans le tableau IV.

## TROISIÈME PARTIE

### ORBITE PÉRIODIQUE LIMITE

M. Lemaitre revisant la détermination de la valeur minimum de  $\gamma_1$  pour laquelle existe encore une orbite périodique, avait obtenu  $\gamma_1 = 0,788.545$ . Les éléments de cette orbite sont publiés dans la première colonne du tableau II.

L'orbite périodique limite a son exposant caractéristique nul. L'équation en  $w$  de l'orbite limite admet donc une solution périodique. Grâce à cette propriété, nous avons déterminé l'expression de l'orbite périodique limite, exacte à six décimales.

Supposons le terme non périodique de  $\frac{2w}{R} \neq 0$ , nous pouvons choisir  $w$  de telle façon que ce terme soit égal à 1.

La solution des équations aux variations devient

$$(17) \quad \begin{cases} \xi_1 = \sigma \xi' + z_0 + z_2 C_2 + z_4 C_4 \dots \\ \eta_1 = \sigma \eta' + \mu_1 S_1 + \mu_3 S_3 + \mu_5 S_5 \dots \end{cases}$$

La variation de  $\gamma_1$  pourra être considérée du second ordre par rapport à la variation des autres éléments de l'orbite périodique, lorsque l'on passe d'une orbite à l'autre dans le voisinage de l'orbite limite. Au premier ordre  $\xi(w + \Delta w) - \xi(w)$ , où  $w$  est écrit pour la valeur limite, est solution des équations aux variations

$$\begin{aligned} \xi(w + \Delta w) - \xi(w) &= [x_0 + \Delta x_0 + (x_2 + \Delta x_2) \cos 2(w + \Delta w) \sigma \dots] \\ &\quad - [x_0 + x_2 \cos 2w \sigma \dots] \\ &\cong \sigma \Delta w \xi' + \Delta x_0 + \Delta x_2 C_2 + \Delta x_4 C_4 + \dots \end{aligned}$$

On voit par là que

$$(18) \quad z_0 = \frac{dx_0}{dw}, \quad z_2 = \frac{dx_2}{dw} \dots$$

de même pour les termes de  $\lambda$ .

Si le terme non périodique de  $\frac{2w}{R} = 0$ ,  $w$  est extrémé à l'orbite limite. Ce n'est pas le cas dans ce problème.

Si nous soulignons d'une barre les éléments d'une orbite approchée de l'orbite limite, la véritable orbite périodique limite s'écrit à des erreurs du second ordre près

$$(19) \quad \begin{cases} \bar{\xi} = \bar{\xi} + \Delta w \bar{\xi}_1 \\ \bar{\eta} = \bar{\eta} + \Delta w \bar{\eta}_1 \end{cases}$$



et à la même approximation

$$(20) \quad \Theta(\zeta, \eta) = \Theta(\bar{\xi}, \bar{\eta}) + \Delta\omega\Theta_1(\bar{\xi}, \bar{\eta})$$

où

$$\Theta_1(\xi, \eta) = \frac{u_1}{w} \frac{d\Theta}{d\sigma} + 6\chi'^2 u' + 6 \frac{\chi'}{w} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{w'}{\sqrt{P}} \right) +$$

$$2(\alpha^2 - \beta^2) \frac{w'}{\sqrt{P}} P_{11} - 2\alpha\beta \frac{w'}{\sqrt{P}} (P_{20} - P_{02}) + w (P_{30}\beta^3 - P_{21}\beta^2\alpha + P_{12}\beta\alpha^2 - P_{03}\alpha^3)$$

En nous bornant à une précision moindre, nous pourrions trouver une solution périodique de

$$(21) \quad \bar{w}'' + \Theta\bar{w} = 0$$

Le déplacement normal limite pourra s'écrire

$$W = \bar{w} + \epsilon_2 C_2 + \epsilon_4 C_4 \dots$$

où  $\epsilon_2, \epsilon_4 \dots$  sont des petites corrections qui peuvent être déterminées en même temps que  $\Delta\omega$  en introduisant l'expression de  $w$  et de  $\Theta$  dans

$$w'' + \Theta(\xi, \eta)w = 0$$

Nous devons ensuite corriger l'orbite  $\xi, \eta$  en tant qu'orbite périodique de période  $\omega + \Delta\omega$ . Pour ce, nous corrigeons les coefficients du développement et déterminons la variation de  $a = \frac{1}{16\gamma_1^4}$  que nous avons négligée au premier ordre.

Écrivons

$$\begin{cases} \Delta x = \Sigma \Delta x_k C_k \\ \Delta \lambda = \Sigma \Delta \mu_k S_k \end{cases} \quad \begin{cases} x'' - P_{10} = \Delta P_{10} \\ \lambda'' - P_{01} = \Delta P_{01} \end{cases}$$

$$x'^2 + \lambda'^2 - 2P = 2\Delta P$$

Ces différences satisfont les équations

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{1}{w^2} \frac{d}{d\sigma^2} \Delta x = P_{20}\Delta x + P_{11}\Delta \lambda + \Delta P_{10} + \frac{\Delta a}{w^2} e^{2x} \\ \frac{1}{w^2} \frac{d^2}{d\sigma^2} \Delta \lambda = P_{11}\Delta x + P_{02}\Delta \lambda + \Delta P_{01} \end{cases}$$

$$(23) \quad \frac{1}{w} \left[ x' \frac{d}{d\sigma} \Delta x + \lambda' \frac{d}{d\sigma} \Delta \lambda \right] = P_{10}\Delta x + P_{01}\Delta \lambda + \Delta P + \frac{\Delta a}{w^2} e^{2x}$$

L'identification des coefficients des  $C_k, S_k$  donne les corrections.

Pour résoudre l'équation (21) nous y avons introduit

$$\bar{w} = 0,5 + \bar{w}_2 C_2 + \bar{w}_4 C_4 + \dots$$

De l'infinité d'équations obtenues, nous avons retenu la première et résolu les autres par rapport aux  $\bar{w}_{2n}$ . L'introduction des  $\bar{w}_{2n}$  dans la première relation donne un résidu qui rend compte de la précision de l'orbite limite génératrice.

L'orbite de paramètre  $\gamma_1 = 0,788.541$  donne un résidu égal à  $-20$  à la sixième décimale, c'est-à-dire de l'ordre des erreurs sur la dérivée seconde de l'orbite périodique  $\xi$  et  $\eta$ . Or,  $\Theta$  est déterminé avec la même précision que les dérivées troisièmes de  $\xi$  et  $\eta$ . Le résidu étant connu en fonction des coefficients de  $\Theta$ , la limite des orbites périodiques est connue avec la même précision que les orbites périodiques elles-mêmes.

TABEAU III

$\gamma_1$	964.953	929.898	895.050	860.846	828.245	799.998
$a_0$	491.329	474.535	446.169	399.371	321.990	186.271
$a_2$	-16.200	-36.678	-63.677	-99.674	-149.509	-222.420
$a_4$	9	27	80	176	327	505
$a_6$				-2	-4	-8
$b_0$	-829.900	-918.031	-1,014.536	-1,117.871	-1,222.37	-1,309.39
$b_2$	115.614	251.744	413.750	605.823	832.17	1,090.89
$b_4$	-2.349	-10.381	-26.057	-51.695	-90.22	-143.57
$b_6$	62	417	1.615	4.417	10.05	19.77
$b_8$	-2	-13	-95	-426	-94	-2.54
$b_{10}$			2	24	18	31
$b_{12}$				-9	-2	-4
$c_1$	-119.152	-187.400	-257.441	-337.111	-433.324	-556.392
$c_3$	-812	-2.622	-5.648	-10.325	-17.485	-28.624
$c_5$	3	21	75	191	424	872
$c_7$				-6	-17	-42
$c_9$						2
$\theta_0$	-637.536	-600.939	-554.624	-492.955	-404.659	-260.427
$\theta_2$	13.440	29.623	50.623	78.490	119.438	187.173
$\theta_4$	102	496	1.473	3.953	8.036	19.517
$\theta_6$		3	42	331	517	1.895
$\theta_8$			8	20	23	141
$\theta_{10}$					3	5

TABLEAU IV

$\gamma_1$	964.953	929.898	895.053	860.846	828.245	799.998
$\mu_1$	— 15.98	— 23.51	— 30.56	— 37.12	— 44.0	— 45.4
$v_1$	40.33	61.55	84.13	112.36	156.3	271.3
$z_2$	+2.17	4.94	8.64	13.98	22.5	39.5
$y_2$	— .90	— 1.98	— 3.07	— 3.98	— 4.1	— 4.4
$\mu_3$	.36	62	2.46	4.66	8.0	15.2
$v_3$	— .16	— .50	— 1.14	— 2.34	— 5.0	— 15.2
$\Omega_1$	702.31	691.95	673.23	640.65	580.9	451.1
$\Omega_2$	702.31	691.96	673.19	640.51	580.55	451.89

TABLEAU V

788.545	788.544	788.541	$w_0$	500.000	$\frac{dx_0}{dw}$	1,803.376	$\frac{d\mu_1}{dw}$	— 174.225
881.763	881.676	881.517	$2w_2$	73.438	$\frac{dx_2}{dw}$	279.125	$\frac{d\mu_3}{dw}$	101.308
— 44.994	— 44.356	— 43.369	$2w_4$	4.278	$\frac{dx_4}{dw}$	805	$\frac{d\mu_5}{dw}$	— 6.380
291.387	291.701	292.220	$2w_6$	319	$\frac{dx_6}{dw}$	10	$\frac{d\mu_7}{dw}$	573
46.308	46.422	46.536	$2w_8$	25			$\frac{d\mu_9}{dw}$	— 50
6.670	6.720	6.749	$2w_{10}$	2			$\frac{d\mu_{11}}{dw}$	6
843	839	830						
106	98	80						
11	11	11						



# Théorie du mouvement gyroscopique des projectiles

## Les états d'instabilité virtuelle

### Les indéterminations

### Les perturbations initiales

PAR

**M. ROBERT D'ADHÉMAR**

---

PRÉFACE. — J'ai constamment essayé de faire usage des travaux antérieurs ; j'ai tenté de justifier certaines hypothèses faites antérieurement. Mais, plus d'une fois, j'ai dû, réflexion faite, repousser des conceptions généralement admises et des modes d'approximation qui paraissaient solides.

Le développement de cette théorie est une suite de *tâtonnements* et cela n'a rien de surprenant, car le projectile se meut dans un milieu fluide que nous connaissons mal.

Dans ce Mémoire, je rappellerai rapidement ce qui a été fait antérieurement. J'étudierai un minimum, voisin de zéro, de l'écart, dans un mouvement de révolution, pour compléter et confirmer mes études précédentes sur les valeurs nulles et presque nulles de l'écart.

Je reprendrai l'étude des perturbations initiales, parce que je me demande si certaines questions ont été bien posées. J'essaierai d'apporter plus de précision sur des questions dont mon exposé antérieur était défectueux.

Le mouvement gyroscopique du projectile est difficile à saisir et je me demande si le vocabulaire de cette science est bien fixé, et si le même terme n'est pas employé, parfois, avec des sens bien différents ?

#### 1. INTRODUCTION.

Je rappelle le sens des notations. Nous désignons par  $G$  le centre de gravité du projectile. L'axe  $Gz$  coïncide avec l'axe de figure, du côté du culot. L'axe  $Gz$  est perpendiculaire sur le plan de résistance, et l'axe  $Gy$  est situé dans le plan de résistance. Je suppose la rayure à *gauche* et le

sens d'orientation est le sens *direct*, le sens contraire de celui des aiguilles d'une montre.

Les composantes du moment résultant des forces extérieures sont :  $\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y, \mathbf{M}_z$ .

Les composantes de la rotation instantanée du projectile sont :  $p, q, r$ .

Je désigne par  $\mathbf{A}$  le moment d'inertie axial, et par  $\mathbf{B}$  le moment d'inertie transversal. Posons :  $v = \mathbf{A} : \mathbf{B}$ .

Ce rapport, pour les projectiles allongés, peut être compris entre  $\frac{1}{6}$  et  $\frac{1}{10}$ .

Soit  $\Omega$  la vitesse de rotation imprimée par les rayures. Nous avons constamment à faire usage de la vitesse réduite :

$$(1) \quad \omega = v\Omega.$$

Désignons par  $a$  le calibre, *en mètres*, et par  $v$  la vitesse, sur la trajectoire, *en mètres par seconde*.

Représentons par  $j$  la tangente de l'angle d'inclinaison des rayures, et par  $V_0$  la vitesse initiale, à la bouche. Nous aurons :

$$(2) \quad \Omega = 2j \frac{V_0}{a}.$$

Je désigne par  $\theta$  l'angle d'inclinaison de la tangente de la *trajectoire vraie*, et par  $\tau$  l'angle d'inclinaison de la tangente de la *trajectoire plane* correspondante, qui nous sert d'approximation. Je désigne par  $\eta$  l'angle de dérivation. Je représente toujours par  $u'$  la dérivée de  $u$  par rapport au temps  $t$ . Nous avons :

$$(3) \quad \frac{d\tau}{dt} = \tau' = -g \frac{\cos \tau}{v}.$$

Je représente souvent  $|\tau'|$  par  $J$ .

Le coefficient balistique est désigné par  $c$ , et la masse est désignée par  $m$ .

Le poids du projectile sera :  $K = mg$ .

Le poids de l'obus est toujours exprimé *en kilogrammes*.

Nous avons, à Paris :  $g = 9,81$ .

J'emploie souvent les notations suivantes : Soient deux nombres positifs  $x$  et  $y$ . Si  $y$  est *petit* par rapport à  $x$ , j'écrirai :

$$y = \beta(x).$$

Il en résulte :

$$x \pm y \sim x.$$

Si  $x$  et  $y$  sont *du même ordre*, j'écrirai :

$$x = O(y), \quad \text{ou bien} \quad y = O(x).$$

On appelle *Loi de résistance* une certaine fonction de la vitesse,  $F(v)$ , qui permet d'exprimer l'accélération retardatrice, ou retardation  $\mathcal{R}$ , due à la résistance de l'air. Nous avons :

$$(4) \quad \mathcal{R} = c F(v),$$

et la *poussée* est une force  $R$ , qui a pour expression :

$$(5) \quad R = m \mathcal{R}.$$

Cette poussée est appliquée au point  $C$ , sur l'axe de figure, en avant. Posons :  $GC = l$ . Le point  $C$  est le centre de poussée.

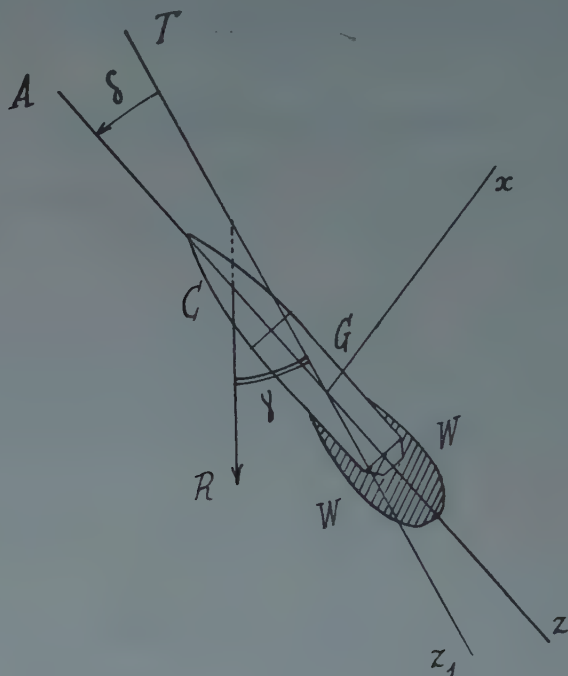


FIG. 1.

Nous pouvons dire, approximativement, que le point  $C$  correspond au milieu de l'ogive. Au point de vue théorique, il est inutile de préciser davantage.

La poussée  $R$  est inclinée sur l'axe de figure ; soit  $\gamma$  l'angle correspondant (Fig. 1).

On appelle *écart* l'angle de la tangente de la trajectoire et de l'axe de figure, que je désigne par  $\delta$ . Pour conserver toujours le même sens d'orientation, je suppose essentiellement :

$$(6) \quad \delta \geq 0;$$



$\delta$  n'est pas une variable algébrique. J'ai donné des explications, à ce sujet, dans mon Mémoire précédent.

Le premier moment  $\mathbf{M}_x$  est le moment de R, par rapport à G, et ce moment définit le demi-axe  $Gx$ . Nous avons :

$$(7) \quad \mathbf{M}_x = Rl \sin \gamma.$$

Nous posons :

$$(8) \quad \sin \gamma \equiv k\delta;$$

$k$  est le coefficient d'obliquité. Si l'angle  $\gamma$  est assez petit, nous avons :

$$(9) \quad k \sim \frac{\sin \gamma}{\sin \delta} \sim \frac{\gamma}{\delta}.$$

Le paramètre  $k$  n'est pas parfaitement connu, et il *varie* probablement sur la trajectoire, surtout dans le cas du tir courbe. Lorsque le tir est de plein fouet, nous pouvons supposer que le coefficient de  $k$  est à peu près constant.

Les paramètres  $k$  et  $l$  ne sont pas bien connus, et il faut, dans les études théoriques, leur donner des *valeurs numériques vraisemblables* <sup>(1)</sup>.

D'après ce qui précède, nous écrirons :

$$(10) \quad \mathbf{M}_x = Rkl\delta \geq 0.$$

Posons :  $P = \frac{Rkl}{A\Omega}$  ; cette fonction joue un rôle important.

Posons :  $Q = \frac{P}{J}$  ; c'est la Fonction de Mayevski, dont le rôle est fondamental.

Il est souvent commode d'écrire la formule (10) sous la forme suivante :

$$(11) \quad \mathbf{M}_x = A\Omega P\delta = B\omega P\delta.$$

On fait, par la formule (4), une séparation très brutale des variables. Il est clair que, les Tables numériques de  $F(v)$  ayant été établies pour certains types de projectiles, ne seraient pas valables pour des projectiles trop nettement différents de ceux qui ont été utilisés pour les mesures.

Nous avons aussi des Tables numériques très précieuses, qui donnent le *degré de résistance*  $n$ , défini par la relation :

$$(12) \quad \frac{n}{v} = \frac{1}{F} \frac{dF}{dv}.$$

Notons bien les faits. Le coefficient balistique n'est pas parfaitement connu. La trajectoire vraie n'est pas parfaitement connue, et nous lui

---

<sup>(1)</sup> J'ai essayé de donner quelques indications, à ce sujet, dans mon Mémoire : Note sur les trois couples fondamentaux et sur l'approximation. *Ann. de la Société scient. de Bruxelles*, 1935.

substituons la trajectoire plane. Nous ne connaissons pas bien les variations des paramètres  $k$  et  $l$ .

Que faut-il conclure ? C'est que la théorie du mouvement gyroscopique des projectiles tournants peut être faite dans ses grandes lignes, que l'on peut saisir l'aspect général du phénomène, mais que nous ne pouvons préciser le détail.

Cherchons à voir l'ensemble ; c'est déjà assez difficile.

Nous avons défini le premier moment. Que dire du deuxième moment  $\mathbf{M}_y$ , qui correspond à des forces dont la résultante est perpendiculaire sur le plan de résistance ?

Ces forces correspondent, d'après M. Esclangon, aux frottements latéraux <sup>(1)</sup>. Autrefois, on admettait que le deuxième moment provient de l'effet Magnus, mais c'est assez vague.

On admettait aussi que  $\mathbf{M}_y$  a un signe constant et contient  $\delta$  en facteur. C'est une *hypothèse* faite a priori, qui n'est pas toujours vérifiée.

Posons :  $\Theta = \mathbf{M}_y : \mathbf{M}_x$ . Le deuxième moment a souvent été négligé, sans explication, ou bien l'on affirmait que le rapport  $\Theta$  est nécessairement petit par rapport à l'unité. C'est une *hypothèse sans fondement*.

La notion des frottements latéraux de M. Esclangon est la plus naturelle et la plus souple, et il faut lui conserver ce caractère de souplesse, en raison de notre ignorance. Je crois qu'il serait téméraire de fixer, a priori, l'*expression* des frottements latéraux.

En particulier, nous ne connaissons pas les *cavitations*, qui entourent le culot, et qui modifient profondément la nature des frottements latéraux sur certaines zones de la surface de l'obus. Nous ne savons rien au sujet de ces zones, sur lesquelles les frottements latéraux sont presque inexistantes. Il est dangereux d'imposer a priori telle ou telle forme à des phénomènes trop peu connus, à des phénomènes dont la nature peut varier fortement, d'un point à l'autre de la paroi.

En bref, pour le moment, n'affirmons rien, au sujet de  $\mathbf{M}_y$ . C'est prudent.

Dans les travaux anciens, on assiste à un déploiement extraordinaire de quadratures, au sujet du calcul de la poussée  $R$ . Tous ces calculs ne nous ont rien appris, parce qu'ils reposent sur des hypothèses concernant les actions de l'air sur le projectile. Et nous ne savons absolument rien de la valeur de ces hypothèses. Si l'on fait maintenant des calculs du même genre, au sujet de l'expression de  $\mathbf{M}_y$ , il est possible que cela représente encore un effort inutile.

Considérons le troisième moment  $\mathbf{M}_z$ . Il est bien vraisemblable que nous pouvons le négliger, après les perturbations initiales. Nous faisons

---

<sup>(1)</sup> ERNEST ESCLANGON, Sur le mouvement des projectiles autour de leur centre de gravité. *Mémorial de l'Artillerie Française*, 1927.

plusieurs approximations de simplification ; celle-ci n'est pas la plus dangereuse. D'ailleurs, si nous connaissons  $M_x$ , il serait, en général, facile d'en tenir compte.

Je dois faire une remarque, au sujet de l'effet de vide à l'arrière du projectile, effet qui a sa répercussion sur chacun des trois moments. La cavitation arrière est représentée schématiquement par une poche W (hachurée dans la figure 1). Sans préciser davantage, nous pouvons dire que cette poche a une action plus forte, si la vitesse  $v$  est plus grande. Sur une trajectoire de plein fouet, nous savons que, pour la partie utile de la trajectoire,  $v$ ,  $P$ ,  $Q$  sont décroissants lorsque  $t$  croît. Donc, sur la partie utile de la trajectoire, l'effet de la poche W est toujours décroissant. Pour une même valeur de  $\delta$ , la valeur de  $\gamma$  sera moindre, si  $v$  est plus grand. Si cette notion intuitive est juste, le rapport  $\gamma : \delta$  et le coefficient  $k$  seront croissants, avec  $t$ , sur la partie utile de la trajectoire.

Et cela aurait pour effet de *régulariser* les variations de  $P$  et de  $Q$ , sur la trajectoire.

Il est possible d'admettre que, pour un *bon projectile*, le coefficient  $k$  et la vitesse  $v$  ont, sur une trajectoire, des variations de sens contraires. M. Burzio, en se plaçant à un autre point de vue, a proposé cette *hypothèse*, qui paraît *très judicieuse*, et que l'on peut adopter provisoirement <sup>(1)</sup>.

Si les paramètres  $k$  et  $l$  ont des variations faibles et de sens contraires, cela permettra de supposer que le produit  $kl$  est à peu près constant. Dans certaines questions, fort heureusement, les valeurs numériques de  $k$  et de  $l$  n'interviennent pas.

## 2. LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT GYROSCOPIQUE.

La figure 2 représente une trajectoire. Le sens d'orientation étant direct, l'axe  $O'Z$  est dirigé vers l'arrière. Je désigne par  $S$  le sommet, par  $D$  le point de *vitesse minimum*, par  $E$  le point de *vitesse maximum*, par  $C'$  le point de chute. Si la dérivation était nulle, le point  $C'$  serait sur l'axe  $O'X$ .

Je désigne par  $M$  le point où la fonction  $Q$  de Mayevski est *minimum*. Dans le cas du tir de plein fouet, les points  $M$ ,  $D$ ,  $E$  sont au delà du point de chute. Dans le cas du tir courbe, les points  $D$  et  $M$  peuvent être très voisins du sommet.

Je suppose que le point  $D$  existe ; c'est ce qui a lieu, en général. Cependant M. Esclangon a fait remarquer qu'il existe certaines trajectoires, sur lesquelles  $v$  est toujours décroissant <sup>(2)</sup>.

---

<sup>(1)</sup> F. BURZIO, Recherches sur la rotation des projectiles, *Mémorial de l'Artillerie Française*, 1927, page 820.

<sup>(2)</sup> ERNEST ESCLANGON, L'Acoustique des canons et des projectiles, *Mémorial de l'Artillerie Française*, 1925. page 56.

Si la dérivation est faible, nous pouvons admettre que la trajectoire plane, que nous calculons, est la projection, sur le plan vertical de départ, de la trajectoire vraie. En réalité, nous ne connaissons que *la trajectoire plane*, et nous serions dans l'embarras si nous ne pouvions tenir la trajectoire plane pour une bonne approximation de la trajectoire vraie.

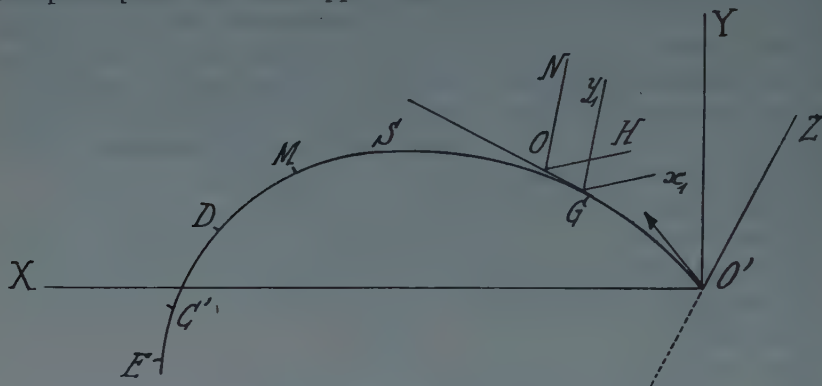


FIG. 2.

Faut-il prolonger la trajectoire indéfiniment ? On le fait parfois, et cela paraît naturel, mais, en même temps, cela nous met dans l'embarras.

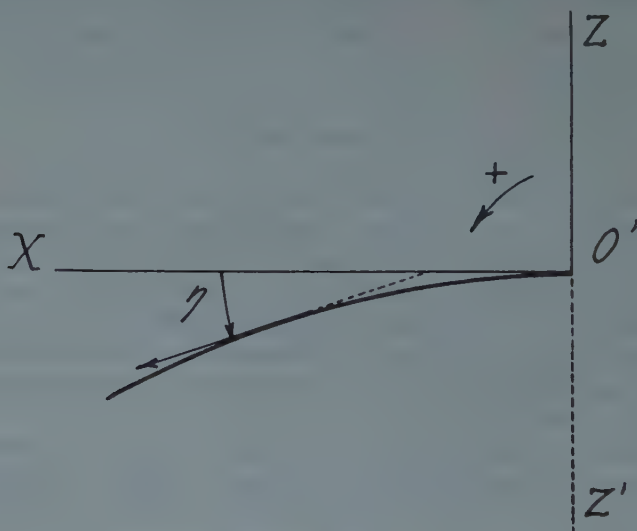


FIG. 3.

Prolonger la trajectoire à l'infini, c'est *supprimer la terre*. Que dire alors de l'accélération de la pesanteur ? Que dire de la densité de l'air ? Je ne crois pas que ce prolongement puisse nous éclairer beaucoup.



Soit GA l'axe de figure, dans le sens de la pointe. Soit GT la tangente, dans le sens du mouvement de G. Le plan GAT est dit « plan de résistance ». L'axe  $Gx$  est perpendiculaire sur ce plan et il porte le moment de la pous-

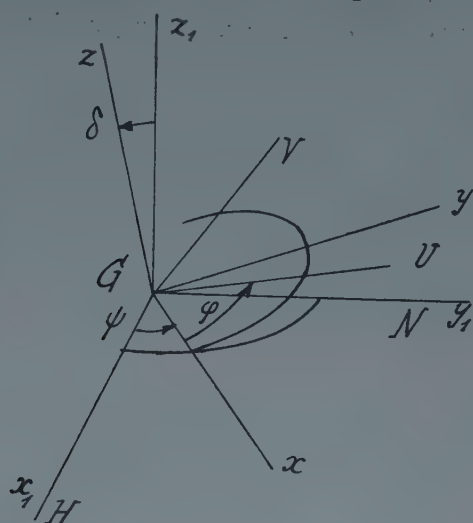


FIG. 4.

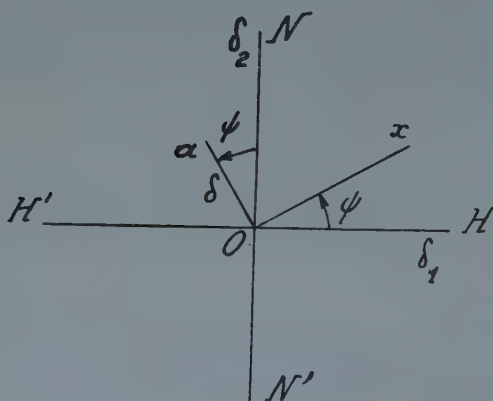


FIG. 5.

sée R, par rapport à G. L'observateur placé sur  $Gx$  voit GT tourner dans le sens direct, pour venir sur GA,  $\delta$  étant *essentiellement positif* (ou nul).

Soit un point O, sur GT, tel que l'on ait :

$$GO = 1.$$

En ce point O, nous prenons un plan OHN perpendiculaire sur GT. Le

semi-axe OH est horizontal, en arrière, et le demi-axe ON est dans le plan vertical contenant la tangente, vers le haut.

L'axe de figure du projectile GA coupe le plan de référence OHN au point  $a$ . En suivant le mouvement de  $a$ , nous voyons le mouvement gyroscopique (Fig. 5).

Au point G, nous prenons un plan  $Gx_1y_1$  perpendiculaire sur la tangente;  $Gx_1$  est parallèle à OH, et  $Gy_1$  est parallèle à ON. L'axe  $Gz_1$  est confondu avec la tangente, en sens inverse du mouvement de G. Ce trièdre  $Gx_1y_1z_1$  nous servira pour définir les angles d'Euler (Fig. 4). Le demi-axe  $Gz$  est confondu avec l'axe de figure, dans le sens du culot. Le trièdre GUVz est lié au projectile; c'est le *trièdre lié*. Je dirai que le trièdre  $Gxyz$  est le *trièdre libre*. Nous passons de GUVz à  $Gxyz$ , en posant:  $\varphi \equiv 0$ .

J'ai établi les formules fondamentales suivantes <sup>(1)</sup>:

$$(13) \begin{cases} p = \delta' + \theta' \cos \psi + \eta' \cos \theta \sin \psi, \\ q = \psi' \sin \delta - \eta' \sin \theta \sin \delta + \cos \delta (-\theta' \sin \psi + \eta' \cos \theta \cos \psi), \\ \rho = \varphi' + \psi' \cos \delta - \eta' \sin \theta \cos \delta - \sin \delta (-\theta' \sin \psi + \eta' \cos \theta \cos \psi). \end{cases}$$

On suppose, en général, que la trajectoire plane est une approximation suffisante de la trajectoire vraie. Je dirai que cela constitue l'approximation TP. Dans ces conditions, nous remplacerons  $\theta$  par  $\tau$  et  $\theta'$  par  $\tau'$  dans les formules ci-dessus.

On suppose, en général, que  $\delta$  est *assez petit*, ce qui signifie que l'on considère exclusivement des tirs *assez réguliers*. Nous pouvons, dans ces conditions, substituer  $\delta$  à  $\sin \delta$ , et 1 à  $\cos \delta$ . Je dirai que cela constitue l'approximation SC.

Les formules (13) prennent alors la forme suivante:

$$(14) \begin{cases} p = \delta' - J \cos \psi + \eta' \cos \tau \cdot \sin \psi, \\ q = \psi' \delta + J \sin \psi + \eta' \cos \tau \cdot \cos \psi - \delta \eta' \sin \tau, \\ \rho = \varphi' + \psi' - \delta J \sin \psi - \eta' \sin \tau - \delta \eta' \cos \tau \cdot \cos \psi. \end{cases}$$

Posons:  $\rho = \varphi' + r$ .

Les composantes de la rotation instantanée du trièdre lié sont:  $p, q, \rho$ .

Les composantes de la rotation instantanée du trièdre libre sont:  $p, q, r$ .

Je m'occupe toujours de la rayure à gauche, et, par suite, la dérivation normale est à gauche du plan de tir, pour l'observateur placé derrière le canon.

La dérivation est toujours négligée dans la première approximation.

<sup>(1)</sup> Sur le mouvement pendulaire des projectiles stables, *Mémorial de l'Artillerie Française*, 1933. Voir aussi mon Mémoire: Les équations du mouvement gyroscopique et la Dérivation des projectiles tournants, *Ann. de la Société scientifique de Bruxelles*, 1935.

On pose :  $\eta \equiv 0$  (Fig. 3). Je dirai que cela constitue l'approximation DN. Les équations (14) prennent alors la forme suivante :

$$(15) \quad \begin{cases} p = \delta' - J \cos \psi, \\ q = \psi' \delta + J \sin \psi, \\ \rho = \varphi' + \psi' - \delta J \sin \psi, \end{cases}$$

et nous avons :  $r = \psi' - \delta J \sin \psi$ .

L'approximation DN est acceptable pour un tir de plein fouet, avec un bon projectile. Elle ne le serait pas avec un projectile défectueux. Dans le cas du tir courbe, il faudrait voir si cette approximation ne modifie pas trop les caractères du phénomène gyroscopique.

Enfin, je fais souvent une approximation, en substituant  $\psi'$  à  $r$ . Je dirai que cela constitue l'approximation A. Il faudra vérifier, avec soin, la validité de cette approximation A.

Considérons les dérivées par rapport au temps,  $\psi''$  et  $r'$ . Substituons  $\psi''$  à  $r'$ . Cela constitue l'approximation A'. Il n'est pas certain, à priori, que l'on puisse faire l'approximation A'. Cela devra être examiné de près.

J'emploie toujours les équations du théorème du moment cinétique sous la forme suivante :

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} + q(v\rho - r) = \frac{1}{B} M_x, \\ \frac{dq}{dt} - p(v\rho - r) = \frac{1}{B} M_y, \\ \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{A} M_z. \end{cases} \quad \left( v \equiv \frac{A}{B} \right),$$

C'est la forme adoptée par M. Sugot, suggérée par M. Saintillan <sup>(1)</sup>.

Je dirai que les équations (13) et (16) constituent le système GY.

Si nous négligeons la dérivation, les équations (15) et (16) constituent le système GYS.

### 3. LES PERTURBATIONS INITIALES.

Il faut signaler les perturbations initiales, qui ont été ignorées autrefois, et qui, actuellement, ne peuvent être omises <sup>(2)</sup>. Nous avons, après le départ, une période pendant laquelle l'écart, partant de la valeur zéro, a une suite de *maxima* et de *minima* très rapprochés. C'est la période d'instabilité initiale, ou d'irrégularité initiale.

<sup>(1)</sup> G. SUGOT, Balistique Extérieure Théorique, *Mémorial de l'Artillerie Française*, 1927.

<sup>(2)</sup> R. H. FOWLER, E. G. GALLOP, etc. Aérodynamique d'un projectile tournant, trad. *Mémorial de l'Artillerie Française*, I, fasc. 2 et 3.

Je prends les conditions les plus favorables, c'est-à-dire que je suppose le projectile bon et le départ normal.

Nous pouvons avoir une régularisation rapide de  $\psi'$ , avec un écart pas trop voisin de zéro. Nous avons alors un mouvement du point  $a$  à peu près circulaire et uniforme, de centre  $O$ . Je dirai que cela constitue la *prestabilisation*.

Je me garde bien d'affirmer que la prestabilisation a toujours lieu et qu'elle a toujours lieu à une petite distance de la bouche, par exemple après une ou deux secondes. Mais si l'on n'a pas une régularisation de ce genre, il paraît difficile de faire la théorie du mouvement gyroscopique. Il est possible que ce mouvement soit désordonné sur toute la trajectoire.

Les gaz qui sortent de la bouche, en jets violents, sont très rapidement dilués dans l'air, de sorte que, si le projectile est bon, les perturbations initiales doivent être rapidement amorties, ce qui correspond à une régularisation rapide des *phénomènes sonores*.

D'une manière générale, quand on étudie le mouvement gyroscopique, on suppose le projectile *assez bon*, les perturbations initiales *assez faibles*, l'amortissement des phénomènes sonores *assez rapide*, la dispersion *faible*.

En un mot, nous nous occupons d'un tir *assez satisfaisant*. Sinon, il serait absurde, par exemple, de dire que  $M_z$  est négligeable, que  $l$  est à peu près constant, que  $k$  varie peu et varie régulièrement.

Je donne ici une simple indication sur la prestabilisation, cette question devant être reprise ultérieurement. Cette notion a un *fondement physique*. En supposant que la prestabilisation a lieu à une petite distance de la bouche, je suppose que les phénomènes sonores sont devenus réguliers à une petite distance de la bouche.

Il faut consulter, à ce sujet, les études de M. E. Esclangon, que j'ai citées antérieurement.

#### 4. L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA PRÉCESSION EULÉRIENNE.

Il faut étudier maintenant la première équation du théorème du moment cinétique, que l'on peut écrire sous la forme d'une équation différentielle par rapport à  $\psi$ . Il s'agit ici de la *précession eulérienne*, et je précise, parce que nous aurons aussi à considérer la *précession balistique*, qui est autre chose.

Lorsque la composante  $\rho$  est variable, nous pouvons poser :

$$(17) \quad \xi(t) = v\rho(t),$$

$\xi$  est la vitesse réduite

Nous pouvons, sans inconvénient, supposer que  $\rho$  est constant, après la période d'irrégularité initiale, et peut-être même pendant cette période.



Jé supposerai, en général, que l'on a :

$$(18) \quad \rho = \Omega = \text{const.}$$

La vitesse réduite est alors  $\omega$ , d'après la formule (1).

Nous pourrions avoir, aussi bien, après la période d'irrégularité initiale :

$$(19) \quad \rho = \Omega_1 = \text{const.}$$

$\Omega_1$  étant assez voisin de  $\Omega$ .

Dans ce cas, la vitesse réduite serait :

$$(1^{\text{bis}}) \quad \omega_1 = v \Omega_1,$$

et il faudrait substituer  $\Omega_1$  à  $\Omega$  dans l'expression de  $P$ .

J'adopterai, en général, la relation (18), mais cela n'a rien d'essentiel.

Dans ces conditions, les trois équations du moment cinétique se réduisent à deux :

$$(20) \quad -\frac{dp}{dt} + q(\omega - r) = \omega P \delta,$$

$$(21) \quad \frac{dq}{dt} - p(\omega - r) = \frac{1}{B} M_y.$$

Et si j'emploie l'approximation A, ces deux équations prennent la forme suivante :

$$(22) \quad \frac{dp}{dt} + q(\omega - \psi') = \omega P \delta,$$

$$(23) \quad \frac{dq}{dt} - p(\omega - \psi') = \frac{1}{B} M_y.$$

Il faut voir ce que signifie cette *approximation A*.

Nous avons, d'après ce qui précède :

$$(24) \quad r = \psi' - \delta J \sin \psi \equiv \psi' - \Sigma.$$

Je suppose  $v$  assez grand et  $\delta$  assez petit ; il en résulte que  $\delta J$  est très petit par rapport à 1.

Supposons que la trajectoire soit de plein fouet. L'angle de départ est inférieur à  $10^\circ$  ou  $12^\circ$ , et la vitesse initiale est supérieure à 500 ms ou 600 ms. La valeur absolue de  $\tau$  ne dépasse pas  $15^\circ$  ou  $18^\circ$ , par exemple. Nous pouvons admettre que l'on a, au point de chute :

$$v > 250 \text{ ms.}$$

Supposons :  $v = 250$  et  $\cos \tau \sim 1$ . Nous aurons approximativement :

$$J = 0 \left( \frac{1}{25} \right).$$

Supposons que nous ayons un écart de  $10^\circ$  (ce n'est pas un écart très petit) ; cela correspond approximativement à :

$$\delta = \frac{1}{6}.$$

Nous avons, dans ces conditions :

$$J\delta = 0 \left( \frac{1}{150} \right).$$

Les circonstances sont un peu différentes pour une trajectoire courbe. Si nous avons, au sommet :  $v = 100$ , nous aurons :

$$J = 0 \left( \frac{1}{10} \right).$$

Si l'écart est de  $15^\circ$ , nous avons approximativement :

$$\delta = \frac{1}{4}.$$

Cela donne :

$$J\delta = 0 \left( \frac{1}{40} \right).$$

C'est encore un nombre petit par rapport à 1.

Mais, dans le cas du *tir courbe*, tout devient plus difficile ; en particulier, nous ne savons pas bien si nous pouvons *négliger* la dérivation.

Il est prudent d'étudier d'abord le tir de plein fouet et de voir ensuite si les résultats subsistent quand on passe au tir courbe.

Donc je considère un *tir de plein fouet* et j'emploie les équations GVS. En outre, j'admets que la relation (18) est vérifiée, et je dirai que ceci constitue l'approximation B.

Revenons à la relation (24) et considérons le rapport :

$$\frac{\omega - r}{\omega - \psi'} = 1 + \frac{\Sigma}{\omega - \psi'}.$$

Ce rapport a pour valeur 1, si l'on a :

$$\delta = 0, \quad \text{ou bien} \quad \sin \psi = 0.$$

Ce rapport est très voisin de 1, si l'on a :

$$\psi' < 0,$$

ou bien si l'on a :

$$(25) \quad |\psi'| = \beta(\omega).$$

Cette condition (25) joue un rôle très important dans la Théorie Élémentaire.

Supposons maintenant :  $\psi' > 0$ .

Je suppose d'abord que  $\psi'$  est un très grand nombre ; je suppose, par exemple, que l'on a :

$$\omega = \beta(\psi').$$

Il est clair que, dans ce cas, le rapport ci-dessus est très voisin de 1.

Je suppose maintenant que l'on a :  $|\omega - \psi'| = O(1)$ .

Le rapport  $\frac{\Sigma}{|\omega - \psi'|}$  sera négligeable, et, par suite, le rapport  $\frac{\omega - r}{\omega - \psi'}$  sera très voisin de 1.

Je suppose toujours :  $\psi' > 0$ , et je suppose que la relation ci-dessous est vérifiée :

$$(26) \quad \psi' \sim \omega.$$

Dans ce cas, nous ne savons pas, à priori, si le rapport  $\frac{\Sigma}{\omega - \psi'}$  est très petit par rapport à 1. Il faudra examiner chaque cas particulier.

Mais il faut remarquer que j'emploie souvent l'équation (20) pour calculer  $\psi'$ . Si nous pouvons savoir indirectement que  $\psi'$  est voisin de  $\omega$ , nous n'avons pas besoin de faire usage de l'équation (22).

Je suppose donc que la relation (26) n'est pas vérifiée. Nous pouvons substituer l'équation (22) à l'équation (20).

En posant, pour simplifier la notation :  $\psi' \equiv x$ , je puis mettre l'équation (22) sous la forme suivante :

$$(27) \quad x^2 \delta - \omega x \delta + \omega P \delta - \omega J \sin \psi - \delta'' + J' \cos \psi = 0.$$

Il faut faire usage de la dérivée, par rapport à  $t$ , de l'équation (20) ; nous verrons que c'est une relation fondamentale. Cette dérivée peut être écrite sous la forme ci-dessous :

$$(28) \quad \frac{d^2 p}{dt^2} + q'(\omega - r) - q r' = \omega (P \delta)'.$$

Si nous prenons la dérivée de l'équation approchée (22), nous aurions l'équation :

$$(29) \quad \frac{d^2 p}{dt^2} + q'(\omega - x) - q x' = \omega (P \delta)'.$$

Et cette équation serait obtenue, aussi bien, en prenant la dérivée de l'équation (27), c'est-à-dire en écrivant :

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 \delta' - \omega x \delta' + \omega P \delta' - \omega J \cos \psi \cdot x - \delta''' - J' \sin \psi \cdot x \\ + 2x x' \delta - \omega x' \delta + \omega P' \delta - \omega J' \sin \psi + J'' \cos \psi \end{array} \right\} = 0.$$

Posons :  $\Phi \equiv x^2 - \omega x + \omega P$  ;  $\Phi$  est connu, si  $x$  (ou  $\psi'$ ) est connu.

L'équation (30) prend la forme suivante :

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi \delta' + x' \delta (2x - \omega) + \omega P' \delta \\ - \omega J \cos \psi \cdot x - J' \sin \psi \cdot (x + \omega) + J'' \cos \psi - \delta''' \end{array} \right\} = 0.$$

Remarquons que la dérivation des *équations approchées* (22) et (27) pourrait ne pas être légitime. Et, en effet, nous voyons l'erreur introduite, en comparant les équations (28) et (29). En dérivant les deux termes de l'équation approchée, nous substituons  $-qx'$  à  $-qr'$ . Posons :

$$(31) \quad r' = x' + S.$$

Nous avons substitué  $-qx'$  à  $-q(x' + S)$ . Donc, en dérivant, par rapport à  $t$ , les deux membres de l'équation approchée (22), nous *omettons* le terme :

$$-qS.$$

Pour faire un calcul correct, il faut *ajouter* ce terme dans le premier membre de l'équation (29), ou bien il faut *ajouter* le terme :

$$+qS,$$

dans le second membre de l'équation (29).

Par suite, l'équation (28), provenant de la dérivation de l'équation (20), peut être mise sous la forme ci-dessous :

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi \delta' + \psi'' \delta (2\psi' - \omega) + \omega P' \delta + qS \\ - \omega J \cos \psi \cdot \psi' - J' \sin \psi \cdot (\psi' + \omega) + J'' \cos \psi - \delta'' \end{array} \right\} = 0.$$

L'équation (32) me permettra d'obtenir l'expression générale de  $M_y$ .

Il faut étudier le terme  $S$  et, dans ce but, il faut substituer à l'équation (24) l'équation complète (24<sup>bis</sup>).

Je néglige toujours la dérivation. Nous avons :

$$(24^{bis}) \quad r = \psi' \cos \delta - \sin \delta \cdot J \sin \psi.$$

Prenons la dérivée par rapport à  $t$  ; nous avons l'équation :

$$(24^{ter}) \quad r' = \left\{ \begin{array}{l} \psi'' \cos \delta - \cos \delta \cdot \delta' J \sin \psi \\ - \psi' \sin \delta \cdot \delta' - \sin \delta (J' \sin \psi + J \cos \psi \cdot \psi') \end{array} \right\}.$$

L'écart  $\delta$  étant assez petit, nous pouvons écrire :

$$(31) \quad r' = \psi'' + S,$$

et nous avons :

$$(33) \quad S \equiv -q\delta' - \delta (J' \sin \psi + J \cos \psi \cdot \psi').$$

La relation (31) représente une approximation, qui est d'autant plus satisfaisante que  $\delta$  est plus voisin de zéro.

## 5. EXPRESSION GÉNÉRALE DU DEUXIÈME MOMENT.

La trajectoire est donnée ; nous connaissons donc, à l'instant  $t$ , les valeurs de  $P, J, J', J''$ .

Supposons le point  $a$  donné ; c'est-à-dire supposons  $\delta$  et  $\psi$  connus.



Supposons, en outre,  $\psi'$  connu et satisfaisant à l'équation (27). Dans ces conditions, les valeurs de  $\Phi$  et de  $qS$  sont connues.

Il faut remarquer que la dérivée première  $\delta'$  et que la dérivée troisième  $\delta'''$  ne figurent pas dans l'équation (27). Je considère actuellement le mouvement gyroscopique *le plus général*, et non le mouvement gyroscopique *élémentaire*, qui est un mouvement gyroscopique particulier. Dans ces conditions, nous devons regarder  $\delta'$  et  $\delta'''$  comme étant des *paramètres indépendants*.

Mettons l'équation (32) sous la forme ci-dessous :

$$(34) \quad \psi''\delta (2\psi' - \omega) + A\delta' + B - \delta''' = 0,$$

en posant :

$$A \equiv \Phi - q^2,$$

$$B \equiv \begin{cases} \omega P'\delta - \omega J \cos \psi \cdot \psi' - J' \sin \psi \cdot (\psi' + \omega) + J'' \cos \psi \\ - q\delta (J' \sin \psi + J \cos \psi \cdot \psi'). \end{cases}$$

Les valeurs de  $A$  et de  $B$  sont connues, si  $\delta$ ,  $\psi$  et  $\psi'$  sont connus.

Posons :  $W \equiv A\delta' + B - \delta'''$ .

C'est une fonction linéaire en  $\delta'$  et en  $\delta'''$ , si nous regardons  $\delta$ ,  $\psi$ ,  $\psi'$  comme étant des constantes données. Il y a deux cas à distinguer, relativement à la valeur de  $\psi'$ . Je suppose que l'on ait :

$$(35) \quad 2\psi' - \omega \neq 0.$$

Dans ce cas, le produit  $\psi''\delta$  est déterminé par l'équation (34), et ce produit est une fonction linéaire de  $\delta'$  et de  $\delta'''$ .

Je suppose maintenant que l'on ait :

$$(36) \quad 2\psi' - \omega = 0.$$

Si l'on a, pour cette valeur de  $\psi'$  :

$$(37) \quad W = 0,$$

alors  $\psi''\delta$  est *indéterminé* ; ce produit peut prendre une valeur finie quelconque. Cette question devra être discutée. Si, au contraire, la relation (36) étant vérifiée, on a, pour cette valeur de  $\psi'$  :

$$(38) \quad W \neq 0,$$

alors la valeur de  $\psi''\delta$  sera *infinie*. Nous verrons que ce fait est dépourvu de sens, au point de vue de l'interprétation physique.

Voyons maintenant quelle est l'expression générale de  $\mathbf{M}_y$ .

Je simplifierai la notation en posant :

$$\mathbf{M}_x = \mathbf{B} \mathbf{X}, \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_y = \mathbf{B} \mathbf{Y}.$$

Nous avons, en faisant l'approximation A :

$$\mathbf{Y} = q' - p(\omega - \psi').$$

L'expression de  $q'$  est :

$$(39) \quad \frac{dq}{dt} = \psi''\delta + \psi'\delta' + J \cos \psi \cdot \psi' + J' \sin \psi.$$

Il en résulte :

$$(40) \quad Y = \psi''\delta + \delta'(2\psi' - \omega) + \omega J \cos \psi + J' \sin \psi.$$

En faisant usage de l'équation (34), nous avons :

$$(41) \quad Y = -\frac{W}{2\psi' - \omega} + \delta'(2\psi' - \omega) + \omega J \cos \psi + J' \sin \psi.$$

D'après ce qui précède,  $Y$  peut être bien déterminé ; c'est le cas général. Il peut exister une indétermination, mais seulement pour une valeur assez grande de  $\psi'$ . Cela sera examiné.

Enfin, supposons vérifiées les relations (36) et (38), alors la valeur de  $Y$  serait infinie. Je ne vois pas la possibilité de l'interprétation physique de ce fait.

En faisant usage de la deuxième équation du moment cinétique, et des expressions de  $p$ ,  $q$ ,  $\rho$ , que j'ai établies, j'obtiens l'expression générale du deuxième moment, sans connaître le détail des phénomènes physiques. Il est dangereux de vouloir fixer l'expression du deuxième moment d'après des hypothèses sur la nature des phénomènes physiques, hypothèses peu sûres, en général.

L'interprétation physique de la formule (41) serait probablement fort difficile. On a beaucoup étudié l'effet d'un obstacle fixe sur l'écoulement d'un fluide <sup>(1)</sup>. Mais il y a ici un élément nouveau ; il faut considérer un obstacle tournant très rapidement autour de son axe de figure, et cette rotation doit modifier profondément les phénomènes.

L'interprétation physique est plus facile lorsque le mouvement gyroscopique est un mouvement particulier, le mouvement élémentaire.

## 6. ÉTUDE D'UN MINIMUM PRESQUE NUL DE L'ÉCART.

Dans une étude précédente <sup>(2)</sup>, j'ai examiné un minimum presque nul de l'écart, dans un mouvement d'oscillation. Je vais étudier la même question, dans un mouvement de révolution. Les circonstances ne sont pas identiques.

Dans la figure 6, la courbe  $A_1 A A_2$  représente un mouvement d'oscillation. Au point  $A$ , l'écart est minimum et l'on a :

$$\delta' = 0, \delta'' > 0, \sin \psi = +1, \cos \psi = 0.$$

<sup>(1)</sup> A. FOCH, Introduction à la Mécanique des fluides. Collection Armand Colin, 1932.

<sup>(2)</sup> Théorie du mouvement gyroscopique des projectiles. Le mouvement gyroscopique élémentaire. Essai d'interprétation physique. Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1937.

L'équation (27) prend la forme suivante :

$$(42) \quad x^2 \delta - \omega x \delta + \omega P \delta - \omega J - \delta'' = 0.$$

Dans cette même figure, la courbe  $B_1 B B_2$  représente un mouvement de révolution. Au point B, l'écart est minimum, et l'on a :

$$\delta' = 0, \delta'' > 0, \sin \psi = -1, \cos \psi = 0.$$

L'équation (27) prend alors la forme suivante :

$$(43) \quad x^2 \delta - \omega x \delta + \omega P \delta + \omega J - \delta'' = 0.$$

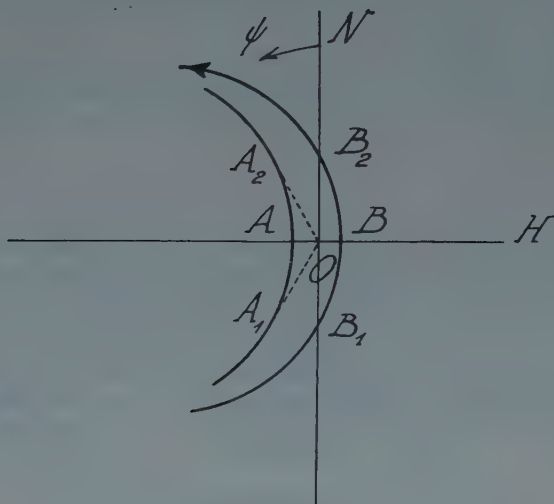


FIG. 6.

Je fais d'abord une remarque, au sujet de l'approximation A. Pour avoir l'équation complète (la dérivation étant toujours négligée), il faut ajouter au premier membre de (43) le terme :

$$qJ\delta = (\psi'\delta - J)\delta.$$

Il faut donc substituer  $(-\omega\delta + J\delta^2)\psi'$  à  $-\omega\delta\psi'$ .

L'altération est insignifiante, en général, et surtout lorsque l'écart est petit.

De même il faut substituer  $(\omega P - J^2)\delta$  à  $\omega P\delta$ .

L'altération est insignifiante, en raison des valeurs numériques de  $\omega$ ,  $P$ ,  $J$ .

Par exemple, si  $Q$  reste supérieur à 10, ou à 5, nous voyons que  $\omega \frac{P}{J}$  est très grand par rapport à  $J$ .

Nous pouvons donc conserver l'équation (43). Nous voyons qu'elle n'a pas exactement la même forme que l'équation (42).

Il faut tenir compte des termes négligés, que je nomme  $\gamma$  termes résiduels », seulement dans le cas où la relation ci-dessous est vérifiée :

$$(26) \quad \frac{d\psi}{dt} \sim \omega, \quad \left( x \equiv \frac{d\psi}{dt} \right).$$

Nous voyons bien, en effet, que, dans ce cas, la somme des deux premiers termes, dans l'équation (43), est voisine de zéro, comme  $(x - \omega)$ .

Pour ne pas alourdir mon exposé, je laisse de côté cette circonstance particulière ; elle sera examinée, si c'est nécessaire. Et j'emploie l'équation (43), pour les mouvements de révolution, et l'équation (42), pour les mouvements d'oscillation.

Je vais définir maintenant le minimum *presque nul* de l'écart. C'est une valeur de  $\delta$ , très voisine de zéro. Mais l'écart est toujours petit, si le projectile a une bonne tenue. Par exemple, si l'on a un angle de  $10^\circ$ , on aura approximativement :  $\delta = \frac{1}{6}$ .

Si l'angle est de  $5^\circ$ , on a approximativement :  $\delta = \frac{1}{12}$ .

Il faut donc préciser un peu le sens du terme « *presque nul* », dans cette théorie. Et n'oublions pas que, dans les approximations de la Balistique, les mots ont souvent un sens un peu *élastique* ; cela est imposé par la nature des choses. Il s'agit, par exemple, de savoir si un nombre  $\epsilon$  est négligeable par rapport à l'unité, ce que j'écris sous cette forme :

$$(44) \quad \epsilon = \beta (1).$$

Prenons :  $\epsilon = \frac{1}{100}$ , la condition est *très bien* remplie.

Prenons :  $\epsilon = \frac{1}{10}$ , la condition est *assez bien* remplie.

Prenons :  $\epsilon = \frac{1}{5}$ , nous pouvons admettre que la condition est à peu près remplie, mais ce n'est pas très satisfaisant.

Si l'on a :  $\epsilon = \frac{1}{2}$ , on peut dire que la condition (44) n'est pas remplie.

Certaines approximations sont très bonnes : d'autres sont seulement acceptables.

J'écris maintenant les équations de Mayevski :

$$(MA) \quad \begin{cases} \delta' = J \cos \psi, \\ \psi' \delta = P \delta - J \sin \psi. \end{cases}$$

Considérons la seconde. J'ai établi qu'elle a une valeur, comme approximation, si l'on a :

$$(25) \quad \frac{|\psi'|}{\omega} = \beta (1).$$



Dans le cas contraire, la seconde équation de Mayevski est *dépourvue de sens* ; elle ne signifie rien au point de vue de la représentation du phénomène gyroscopique.

Considérons un minimum de l'écart, représenté par le point A, dans un *mouvement d'oscillation*. Nous avons :  $\sin \psi = + 1$ .

La seconde équation (MA) prend la forme ci-dessous :

$$(45) \quad \psi' = P - \frac{J}{\delta} < 0.$$

Je prends une valeur de l'écart assez petite, par exemple :

$$(46) \quad \delta = \frac{1}{\omega}.$$

Nous aurons :

$$(47) \quad \psi' = P - \omega J < 0.$$

Cette inégalité permet de voir que le passage de la révolution à l'oscillation ne saurait avoir lieu tout près de l'origine de la trajectoire.

En effet, la relation (47) peut être mise sous cette forme :

$$Q < \omega.$$

Et nous pouvons avoir :  $\omega = 150$ , ou  $200$ .

Au contraire, la valeur de  $Q$ , dans la région de l'origine de la trajectoire, pour un tir de plein fouet, est beaucoup plus grande.

Nous pouvons écrire :

$$(48) \quad |\psi'| = \omega J - P < \omega J,$$

ou bien :

$$\frac{|\psi'|}{\omega} < J.$$

La valeur numérique de  $J$  est très inférieure à 1.

Par suite, la seconde équation (MA) est valable, par un minimum de l'écart défini par (46).

Considérons maintenant un minimum de l'écart, représenté par B (Fig. 6), dans un *mouvement de révolution*, et supposons  $\delta$  défini par la relation (46).

Nous avons :  $\sin \psi = - 1$ .

La seconde équation (MA) prend la forme suivante :

$$(49) \quad \psi' = P + \frac{J}{\delta} = P + \omega J > 0.$$

Nous pouvons écrire :

$$P + \omega J = J(Q + \omega).$$

Si, au moment du minimum de l'écart, dans ces conditions, nous avons :

$$Q = 0(\omega),$$

il en résultera :

$$\frac{\psi'}{\omega} = 0(2J).$$

Dans ce cas, la seconde équation (MA) sera valable.

Et, à fortiori, elle sera valable si l'on a :

$$Q < \omega.$$

Nous voyons que la seconde équation (MA) pourra être valable, pour un minimum de  $\delta$  défini par (46).

Par suite, lorsque je dirai que  $\delta$  est presque nul, cela voudra dire que  $\delta$  est beaucoup plus petit que  $\frac{1}{\omega}$ .

Il est inutile d'insister ; la suite fera comprendre nettement le sens du terme adopté.

Il faut maintenant reprendre les équations (MA), dont l'interprétation a toujours été superficielle, et même défectueuse. J'ai établi qu'il faut comprendre les équations de Mayevski de la manière suivante <sup>(1)</sup>.

La première équation (MA) est équivalente à celle-ci :

$$(50) \quad p \equiv 0,$$

En particulier, on a :  $p = p' = 0$ .

La seconde équation (MA) est une relation approchée :

$$(51) \quad q = P\delta,$$

qui a un sens bien clair, si la condition (25) est remplie, et qui n'a aucun sens dans le cas contraire.

Dans l'étude du mouvement gyroscopique, nous ne pouvons *séparer* les deux équations (MA). C'est leur ensemble qui joue, car ces deux équations proviennent de la décomposition artificielle d'une seule équation, l'équation fondamentale (20), qui prend la forme (22), si l'on applique l'approximation A.

J'ai employé l'équation (51) ; maintenant je vais faire usage de l'équation (50).

Nous avons, en général, la dérivation étant négligée, l'expression suivante :

$$(52) \quad \frac{dp}{dt} = \delta'' - J' \cos \psi + J \sin \psi \cdot \psi'.$$

---

<sup>(1)</sup> Voir ma Note : Le moment d'impulsion initiale et l'inclinaison des rayures. Les périodes d'instabilité virtuelle des projectiles. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 26 octobre 1936.

Si l'expression de la dérivée  $\delta''$  est telle que l'on ait :

$$(53) \quad \frac{dp}{dt} \neq 0,$$

l'ensemble des équations (MA) n'est pas valable, et cela, quelle que soit la valeur de  $\psi'$ . Ceci nous donne immédiatement un résultat. Considérons un mouvement d'oscillation, et un minimum de l'écart, représenté par le point A. Il est inutile de supposer que  $\delta$  est presque nul ; la valeur de  $\delta$  est quelconque. Je fais l'hypothèse suivante :

$$H \quad \delta'' = \omega J.$$

Si le mouvement gyroscopique est régi par les équations de Mayevski, nous aurons :  $p' = 0$ , et, par suite :

$$(54) \quad \delta'' = J |\psi'|, \quad (\psi' < 0).$$

Nous aurons donc la relation :

$$(55) \quad |\psi'| = \omega.$$

Il y a contradiction, car la condition (25) n'est pas remplie.

Je fais maintenant l'hypothèse suivante :

$$H' \quad \delta'' = (\omega + h) J, \quad h > 0.$$

Si le mouvement gyroscopique est régi par les équations (MA), nous aurons la relation :

$$(56) \quad |\psi'| = \omega + h > \omega.$$

Il y a encore contradiction.

Considérons un mouvement de révolution et un minimum de l'écart, représenté par le point B. Si le mouvement gyroscopique est régi par les équations (MA), nous avons la relation :

$$(57) \quad \delta'' = J \psi' > 0.$$

Faisons l'hypothèse H ; il y a contradiction. Faisons l'hypothèse H' ; il y a encore contradiction.

Je conclus. Pour un minimum de  $\delta$ , situé sur l'axe H'OH, quelle que soit la valeur de  $\delta$ , si l'on a, en ce point :

$$(58) \quad \delta'' \geq \omega J,$$

il est certain que le mouvement gyroscopique ne peut être régi, à cet instant, par les équations (MA).

Pour achever cette discussion, revenons aux équations (42) et (43). Les solutions de l'équation (42) sont données par la formule :

$$(59) \quad 2x = \omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4\omega P + 4 \frac{\omega J + \delta''}{\delta}}.$$

C'est la solution *négative* qui nous intéresse, car le mouvement est une oscillation.

Nous faisons maintenant l'hypothèse suivante :

$$(60) \quad 0 < \delta'' < \omega J,$$

Il est clair que, si la valeur de  $\delta$  est très voisine de *zéro*, nous aurons une solution *négative*, dont la valeur absolue sera grande. Par suite, la condition (25) *ne sera pas remplie*, et le mouvement gyroscopique ne sera pas régi par les équations (MA).

Les solutions de l'équation (43) sont données par la formule :

$$(61) \quad 2x = \omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4\omega P - 4 \frac{\omega J - \delta''}{\delta}}.$$

Nous faisons la même hypothèse, exprimée par l'inégalité (60).

Il est clair que, si la valeur de  $\delta$  est très voisine de *zéro*, les racines auront des valeurs *imaginaires*. Par suite, dans ces conditions, le mouvement gyroscopique est impossible.

La conclusion est simple. Si nous avons un minimum de l'écart, situé sur l'axe H'OH, et si la valeur de  $\delta$  est très voisine de *zéro* (je dis : presque nulle), dans ces conditions, à cet instant, le mouvement gyroscopique du projectile ne saurait être régi par les équations de Mayevski.

J'ai donc trouvé, tout simplement et naturellement, des circonstances telles que les équations (MA) soient certainement inapplicables.

(A suivre).



## Deuxième Section

---

### Physique et Chimie

---

M. R. Breckpot entretient la Section de ses travaux spectrographiques.

---

## Sur la définition générale de l'entropie et les bases de la thermodynamique chimique

PAR

M. W. MUND

---

### I. — INTRODUCTION. — REMARQUES SUR LE THÉORÈME DE CLAUSIUS

Soit  $dQ$  une quantité de chaleur élémentaire absorbée par un système à la température  $T$ . La somme

$$\int \frac{dQ}{T}$$

étendue à toutes les quantités de chaleur élémentaires absorbées par un système qui subit une transformation a été appelée par Clausius la *valeur de la transformation*. Conformément à l'usage qui tend à prévaloir aujourd'hui, nous l'appellerons la *chaleur réduite*. Étudiant au point de vue du principe de Carnot les modifications réelles des systèmes fermés, dans le temps croissant, Clausius sut établir le théorème fondamental qui porte son nom : lorsqu'un système parcourt un cycle, la chaleur réduite absorbée au cours de ce cycle ne saurait être positive. Cependant la démonstration de Clausius manque de généralité, car elle implique cette hypothèse restrictive qu'à chaque instant le système est caractérisé par une température uniforme.

Même sous cette forme restreinte le théorème de Clausius se montra

tellement fécond que très peu d'auteurs se soucièrent de le généraliser. Parmi eux il convient de citer H. Poincaré <sup>(1)</sup>, qui consacre un long chapitre de sa thermodynamique à « l'extension du théorème de Clausius » et rappelle les idées déjà émises à ce sujet par J. Bertrand <sup>(2)</sup>.

Envisageant donc le cas où la température varie, non seulement d'un instant à l'autre au même point, mais aussi d'un point à l'autre au même instant, Poincaré conclut que le théorème de Clausius reste vrai, si la somme est étendue d'abord à tous les systèmes élémentaires, dont il *suppose* que le système total peut être considéré comme composé, et ensuite, pour chaque système, à tous les intervalles de temps dont se compose la durée du cycle. La question se pose de savoir si  $dQ$  doit alors représenter la chaleur totale qu'un système élémentaire reçoit pendant l'intervalle de temps  $dt$ , ou seulement la chaleur cédée au système élémentaire par des sources de chaleur extérieures au système total. Poincaré accepte cette ambiguïté en démontrant que l'une ou l'autre de ces deux interprétations laisse subsister le théorème de Clausius. Mais la démonstration indiquée par Poincaré est basée sur la décomposition du système total en systèmes élémentaires infinitésimaux, auxquels le théorème de Clausius, sous sa forme restreinte, serait directement applicable. Or, une telle décomposition n'est pas toujours possible, comme il est facile de s'en assurer en songeant à un mélange de plusieurs gaz dans lequel la concentration varie d'un point à l'autre. La diffusion plus ou moins active, dont un tel système est nécessairement le siège, empêche de considérer les éléments de volume ou de masse comme des systèmes partiels auxquels le théorème de Clausius serait directement applicable et pour lesquels les raisonnements de Poincaré garderaient leur clarté et leur rigueur.

Il est toutefois possible d'éviter la décomposition du système étudié en systèmes élémentaires, et de démontrer d'une manière parfaitement générale <sup>(3)</sup> que, dans l'évaluation de la chaleur réduite qui forme l'objet du théorème de Clausius généralisé, la somme doit être étendue à tous les intervalles de temps et, pour chaque intervalle, à tous les éléments de surface du système. L'élément de l'intégrale  $\int T^{-1} dQ$  est donc la quantité de chaleur qui traverse, vers l'intérieur du système, l'élément de surface  $d\sigma$  pendant l'intervalle de temps  $dt$ , rapportée à la température instantanée, de cet élément de surface. Le théorème de Clausius pour un cycle quelconque peut donc s'exprimer comme suit :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\sigma} T^{-1} \frac{d^2 Q}{d\sigma dt} d\sigma dt \leq 0.$$

(1) H. POINCARÉ, Thermodynamique (réédition de J. Blondin) 2<sup>me</sup> édit., p. 219 à 258 ; Paris (1923).

(2) J. BERTRAND, Thermodynamique, p. 265 à 273, Paris (1887).

(3) Ann. Soc. scient. Brux., t. 45 (1 part.), p. 273 à 279 (1926).

Il est bien entendu d'ailleurs, conformément à la remarque judicieuse formulée par Poincaré, qu'il est prudent de limiter les raisonnements thermodynamiques basés sur le théorème de Clausius à la chaleur transmise par voie de conduction thermique, à l'exclusion de la chaleur rayonnée.

Au début de cette introduction, nous avons tenu à rappeler en détail la signification du théorème de Clausius généralisé, non seulement parce que l'application de ce théorème jouera un rôle essentiel dans la suite de ce travail, mais aussi parce que ces développements préliminaires permettent de mieux saisir les données du problème que nous nous proposons d'aborder.

Lorsqu'il est possible de faire passer d'une manière réversible un certain système A d'un état (1) en un état (2), tous les auteurs s'accordent à définir la variation d'entropie  $S_2 - S_1$  en l'identifiant avec la chaleur réduite absorbée dans la transformation réversible (1)  $\rightarrow$  (2). Il résulte en effet du théorème de Clausius (grâce à un raisonnement classique) que, dans toutes les modifications réversibles qui peuvent amener le système de l'état (1) en l'état (2), la chaleur réduite présente la même valeur. On peut dès lors se demander comment il convient de définir l'entropie du système A, lorsque ce dernier ne se trouve pas dans un état d'équilibre. En effet, une modification réversible n'est définie que comme une suite continue d'états dont chacun est infiniment voisin d'un état d'équilibre. Un état très différent d'un état d'équilibre ne pourra donc en aucun cas être considéré comme le terme d'une transformation réversible. Par conséquent, l'entropie du système exige une définition plus explicite lorsque le système n'est pas en équilibre. Comme exemple d'un système très éloigné de l'équilibre nous pouvons nous figurer la masse gazeuse qui s'échappe de la bouche d'un canon immédiatement après le départ de l'obus. Dans cette masse la température et la pression varient d'un point à l'autre, il s'y propage des ondes, il s'y produit des réactions chimiques avec des vitesses localement très différentes et la composition chimique de chaque élément de volume s'y modifie au surplus par l'effet de la diffusion.

Dans la troisième partie de ce travail, nous formulerons la définition de l'entropie qui paraît convenir pour l'étude du cas général, et nous en examinerons quelques conséquences. Toutefois, afin de pouvoir donner à cette définition de l'entropie toute la précision désirable, nous aurons à faire usage de certaines propriétés thermodynamiques bien connues des systèmes homogènes, propriétés dont la présentation sous une forme appropriée, avec certains commentaires, fera l'objet de la deuxième partie.

## II. — SYSTÈMES DE TEMPÉRATURE ET DE CONCENTRATIONS UNIFORMES

Distinguons avant tout deux espèces de systèmes, les systèmes *fermés* et les systèmes *ouverts*. Les premiers peuvent se définir comme le contenu d'une surface fermée qui se déforme et se dilate ou se contracte, pendant la modification considérée, de telle manière qu'aucune particule matérielle ne la traverse. Le contenu d'une surface fermée quelconque, ne satisfaisant pas à cette condition, constitue par définition un système ouvert.

Un système *homogène* (au sens strict du mot), qu'il soit ouvert ou fermé, se caractérise par l'uniformité vérifiée à chaque instant par la distribution de la température et de la concentration de chaque espèce chimique intervenant dans la composition du système.

Considérons d'abord un système fermé, homogène, qui ne soit le siège d'aucune réaction chimique. L'accroissement de son énergie est définie comme la somme de la chaleur absorbée et du travail des forces extérieures appliquées au système, chaleur et travail étant exprimés dans une unité commune. Parmi les forces extérieures, les seules que nous ayons à considérer sont celles dont l'effet est équivalent à une pression normale et uniforme exercée sur la surface du système, de sorte que le travail peut s'exprimer par (1)

$$\mathcal{C} = - \int_1^2 P dV,$$

en désignant par  $P$  la pression, et par  $dV$  l'accroissement élémentaire du volume. Puisqu'en vertu du premier principe de la thermodynamique l'énergie  $U$  est une fonction de l'état du système et qu'en l'absence de réaction chimique cet état est complètement défini par le volume  $V$  et la température absolue  $T$ , nous pouvons poser

$$(1) \quad dU = dQ - P dV = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV.$$

Il est essentiel de remarquer que l'hypothèse d'une température et d'une composition chimique constamment uniformes exclut toute transformation irréversible dans un système dépourvu de mobilité chimique. Ainsi que nous y avons insisté dans une étude antérieure (2), toute modification thermiquement ou mécaniquement irréversible suppose, en effet, l'existence d'un gradient de température ou de pression.

En vertu de la définition habituelle de l'entropie et de l'équation (1), nous pouvons écrire pour un système fermé, homogène, en absence de

(1) Voir par ex. *Ann. Soc. scient. Brux.*, t. 44 (I part.) p. 508-510 (1925).

(2) *Ann. Soc. scient. Brux.*, t. 56 (série B), p. 15-34 (1936).



réaction chimique,

$$(2) \quad dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU + P dV}{T} = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_v dT + \frac{1}{T} \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right\} dV$$

D'autre part, comme l'entropie est une fonction de l'état du système,

$$(3) \quad dS = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV$$

La comparaison de (2) et de (3) fournit les égalités classiques :

$$(4^a) \quad \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_v = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_v$$

$$(4^b) \quad \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \frac{1}{T} \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right\}$$

Supposons maintenant que le système fermé, homogène, considéré soit au contraire le siège d'une réaction chimique. Le théorème de Clausius nous oblige alors à écrire

$$(5) \quad dS = \frac{dQ}{T} + \epsilon^2$$

puisque toute transformation chimique s'effectuant réellement dans un système constitue un processus irréversible. En effet, le fait même que le système quitte son état instantané E pour un état E' montre bien que l'état E n'était pas un état d'équilibre et en diffèrait d'autant plus que le passage de l'état E en l'état E' s'effectue plus vivement. L'irréversibilité des réactions chimiques réelles est d'ailleurs illustrée d'une manière frappante par le principe de Le Chatelier, que l'on peut déduire très directement du principe de Carnot <sup>(1)</sup> et dont une des conséquences est précisément l'impossibilité de la réaction inverse.

Nous écrivons l'équation (5) sous la forme

$$(5^{bis}) \quad T dS = dQ + dQ'$$

où  $dQ' = \epsilon^2 T$  est une grandeur essentiellement positive.

La grandeur  $\epsilon^2$ , que Duhem représente souvent par  $d\bar{w}$ , a déjà été considérée par Clausius sous le nom de *transformation non compensée*. De là le nom de *chaleur non compensée* que l'on donne ordinairement au produit  $\epsilon^2 T$ . On peut d'ailleurs critiquer cette terminologie, que nous adopterons cependant pour nous conformer à l'usage général. En effet, au second membre de l'équation (5), le premier terme peut être considéré comme représentant cette partie de l'accroissement d'entropie qui correspondrait à l'absorption physiquement réversible de la chaleur  $dQ$  à la température

(1) *Ann. Soc. scient. Brux.*, T. 56 (série B), p. 20-24 (1936).

uniforme  $T$ . Le second terme devrait donc plus justement s'appeler l'accroissement d'entropie non compensé (si bien entendu on est disposé à considérer la chaleur réduite comme « compensant » l'accroissement d'entropie dans le cas d'un phénomène réversible). Au surplus, on éviterait ainsi de suggérer cette idée fausse que  $\epsilon^2 T$  représenterait une partie de la chaleur réellement absorbée par le système.

Quoi qu'il en soit de cette question de mots, la considération explicite de la chaleur non compensée s'est montrée extrêmement utile dans l'étude des phénomènes irréversibles. Déjà Duhem<sup>(1)</sup> a systématiquement appliqué cette méthode dans plusieurs paragraphes remarquables de son *Traité de Mécanique Chimique*, et il a développé notamment l'expression de la chaleur non compensée (représentée chez lui par  $Td\bar{\omega}$ ) en fonction des variables dont dépend en général l'état d'un système. Récemment, dans le domaine particulier de la thermodynamique chimique, Th. De Donder<sup>(2)</sup>, suivant la même voie, a réussi, non seulement à retrouver les théorèmes fondamentaux, mais parfois à les généraliser et à en développer les nombreuses conséquences.

Cherchons maintenant les expressions de  $dU$  et de  $dS$  dans le cas d'un système ouvert, homogène, dépourvu de mobilité chimique. Soient  $n_1, n_2, \dots, n_i, \dots$  les nombres des molécules-grammes des différentes espèces chimiques dont le système se compose à l'instant considéré. Nous comparerons d'abord entre eux deux systèmes fermés,  $A$  et  $A'$ , ayant la même température et le même volume et contenant les mêmes composants chimiques. Ceux-ci seront représentés par les mêmes nombres de molécules-grammes, à l'exception du composant  $(i)$ , dont le système  $A$  contiendra  $n$  molécules-grammes tandis que le système  $A'$  en contiendra  $n'_i = n_i + dn_i$ . Si les deux systèmes subissent la même variation de température,  $T_2 - T_1$ , et la même variation de volume,  $V_2 - V_1$ , sans que leur composition chimique se modifie par suite d'une réaction, les chaleurs absorbées et les travaux des forces extérieures ne seront pas rigoureusement les mêmes. En vertu de la définition de la variation d'énergie nous pouvons donc poser :

$$U'_2 - U'_1 \neq U_2 - U_1$$

Puisque la différence entre  $A$  et  $A'$  se réduit à un excès de  $dn_i$  molécules-grammes du corps  $(i)$  dans le système  $A'$ , nous écrirons

$$U'_1 - U'_2 = U_1 - U_2 + d(U_2 - U_1)$$

La différentielle sera considérée comme la différence de deux différentielles :

(1) P. DUHEM. *Traité élémentaire de Mécanique Chimique*. Tome I, pp. 81, 82, pp. 85 86 et surtout pp. 155 à 158. Paris (1897).

(2) Les importants travaux thermodynamiques de TH. DE DONDER se trouvent résumés dans l'ouvrage : *L'Affinité* (rédict. P. Van Rysselberghe), Paris, 1936.

$$(6) \quad d(U_2 - U_1) = \frac{dU_2}{dn_i} dn_i - \frac{dU_1}{dn_i} dn_i$$

Chacune de ces deux différentielles représente l'accroissement que subit l'énergie du système A, lorsque, sans modifier la température ( $T_1$  ou  $T_2$ ) de ce système, ni son volume ( $V_1$  ou  $V_2$ ), on y ajoute un nombre de molécules-grammes du corps (i) égal à  $dn_i$ .

Les considérations précédentes, relatives aux systèmes fermés A et A', permettent de comprendre comment on se trouve amené très naturellement, en assimilant un système ouvert à un système fermé, différent d'un instant à l'autre, à définir l'énergie du système ouvert par celle du système fermé qui lui équivaut à l'instant considéré. L'énergie d'un système ouvert est donc une fonction des variables  $T, V, n_1, n_2, \dots n_i, \dots$ . La dérivée de l'énergie  $U$  ( $TVn_1n_2 \dots n_i \dots$ ) par rapport à  $n_i$  est, par définition, l'énergie moléculaire partielle du composant (i) et sera représentée par

$$(7) \quad U_i = \left( \frac{\partial U}{\partial n_i} \right)_{TVn'}$$

où l'indice  $n'$  signifie que tous les nombres de molécules-grammes sont fixes à l'exception de  $n_i$ . En convenant que l'indice  $n$  signifiera que toutes les variables  $n_1, n_2, \dots n_i, \dots$  sont fixes nous écrirons

$$(8) \quad dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{vn} dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{Tn} dV + \sum_i \left( \frac{\partial U}{\partial n_i} \right)_{TVn'} dn_i$$

On peut montrer d'une manière analogue que pour un système ouvert, homogène, dépourvu du mobilité chimique, l'entropie également peut être considérée comme fonction de  $T, V, n_1, n_2, \dots n_i, \dots$ . Nous définirons l'entropie moléculaire partielle du composant (i) par l'identité

$$(7^{bis}) \quad S_i = \left( \frac{\partial S}{\partial n_i} \right)_{TVn'}$$

et nous écrirons :

$$(9) \quad dS = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{vn} dT + \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{Tn} dV + \sum_i \left( \frac{\partial S}{\partial n_i} \right)_{TVn'} dn_i$$

Mais il est évident que si la composition chimique, en principe variable, d'un système ouvert est, en fait, maintenue constante, comme le signifie l'indice  $n$ , ce système se comporte comme un système fermé. Dès lors les égalités (4a) et (4b) entraînent les égalités

$$(10a) \quad \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{vn} = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{vn}$$

$$(10b) \quad \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{Tn} = \frac{1}{T} \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{Tn} + P \right\}$$

Par conséquent

$$(11) \quad TdS - dU - PdV = T \sum_i S_i dn_i - \sum_i U_i dn_i = - \sum_i \Psi_i dn_i$$

Dans la dernière équation,  $\Psi_i$  désigne la différence  $U_i - TS_i$ . C'est l'énergie libre moléculaire partielle, qui est, par définition, la dérivée partielle par rapport à  $n_i$  de la fonction d'état que Helmholtz a introduite sous le nom d'énergie libre du système :  $\Psi = U - TS$ .

L'équation (11) peut aussi se mettre sous la forme :

$$(11^{bis}) \quad d\Psi = -PdV - SdT + \sum_i \Psi_i dn_i,$$

puisque

$$d\Psi = dU - TdS - SdT.$$

Nous voici préparés à enfin traiter le cas important d'un système fermé, homogène, au sein duquel se déroule une réaction chimique.

Cette réaction sera représentée par l'équation chimique



où  $M_1, M_2, \dots, M'_1, M'_2, \dots$  sont les masses moléculaires et  $N_1, N_2, \dots, N'_1, N'_2, \dots$  des nombres entiers appelés *coefficients stoechiométriques*. En convenant de considérer comme négatifs les coefficients relatifs aux corps consommés par la réaction, nous écrirons l'équation chimique générale sous la forme

$$(12) \quad \sum N_i M_i = 0$$

Le rapport

$$C_i = \frac{n_i}{V}$$

sera appelé la *concentration* du corps (i) dans le système. Cette concentration varie au cours du temps, du fait de la réaction chimique. Nous définirons la *vitesse de réaction* par l'identité

$$(13) \quad W = \frac{1}{N_i} \frac{dC_i}{dt}$$

En vertu de la convention que nous avons faite quant au signe de  $N_i$ , la vitesse de réaction sera la même quel que soit le corps (i) considéré, pourvu que ce corps participe à la réaction.

Ces définitions étant posées, nous sommes en mesure d'interpréter de la manière suivante l'artifice de raisonnement véritablement génial <sup>(1)</sup> grâce auquel J. W. Gibbs réussit à constituer une thermodynamique chimique.

---

(<sup>1</sup>) et d'ailleurs implicite.



Un système homogène fermé, qui est le siège d'une réaction de vitesse  $W$ , peut être assimilé, au point de vue thermodynamique, à un système homogène ouvert, dépourvu de mobilité chimique, où chaque composant serait introduit au cours du temps à la vitesse

$$(14) \quad \frac{dn_i}{dt} = N_i V W$$

Cette proposition présente un tel degré d'évidence physique que, lorsqu'elle est formulée comme elle vient de l'être, nul ne songera sans doute à l'appeler un postulat. Elle nous autorise à appliquer au cas du système fermé, homogène, en voie de transformation chimique, l'équation (11) que nous avons déduite plus haut en pensant seulement aux systèmes ouverts, chimiquement inertes. Bien entendu  $dn_i$  sera maintenant remplacé par sa valeur tirée de (14). Nous obtenons ainsi

$$(15) \quad T dS - dU - P dV = - V W \sum_i \Psi_i N_i dt.$$

Si le système était le siège de plusieurs réactions exprimées par des équations linéairement indépendantes, on aurait

$$(16) \quad T dS - dU - P dV = - V \sum_r \sum_i W_r \Psi_i N_{ir} dt.$$

Bien que considéré comme ouvert, pour tenir compte de la variation de composition déterminée par la réaction chimique, le système dont nous parlons pour le moment n'en reste pas moins un système réellement fermé. Nous pouvons, par conséquent, lui appliquer l'équation (5<sup>bis</sup>) en remarquant que, pour tout système fermé

$$dQ = dU + P dV.$$

En combinant entre elles les équations (5<sup>bis</sup>) et (16) nous pouvons écrire

$$(17) \quad \frac{dQ'}{dt} = - V \sum_r \sum_i W_r \Psi_i N_{ir}.$$

Considérant le cas d'une réaction unique, il importe de faire remarquer que la grandeur

$$(18) \quad \frac{1}{V W} \frac{dQ'}{dt} = - \sum_i N_i \Psi_i$$

est une fonction de l'état instantané du système.

Il est évident, en effet, que si l'énergie et l'entropie d'un système ouvert, où aucune réaction chimique n'a lieu, sont fonctions des variables  $T, V, n_1, n_2, \dots, n_i, \dots$ , chacune des dérivées partielles ne dépendra que des valeurs de ces variables à l'instant considéré, ou, plus brièvement, sera une fonction de l'état instantané du système. Or, à chaque instant, un système fermé en voie de transformation chimique peut, selon l'ingénieuse méthode de Gibbs, être assimilé, au point de vue de son énergie

et de son entropie, à un système ouvert, dépourvu de mobilité chimique et caractérisé par les mêmes valeurs des variables  $T$ ,  $V$ ,  $n_1$ ,  $n_2$ , ...  $n_i$ , ...

Remarquons aussi que les équations (17) et (18) subsistent indépendamment des variations de volume, de température ou de pression, que le système, en voie de transformation chimique, peut en outre subir pendant l'intervalle de temps  $dt$ . En effet, grâce aux équations (10), les termes en  $dT$  et en  $dV$  qui intervenaient dans les expressions (8) et (9) de  $dU$  et de  $dS$  se sont trouvés éliminés en formant la différence (11). Quant à l'augmentation de pression  $dP$ , elle dépend à la fois de l'état du système et des différentielles  $dT$ ,  $dV$  et  $Wdt$ .

Le fait que la somme  $\sum \Psi_i N_i$  est une fonction de l'état du système n'avait certes pas échappé à J. W. Gibbs. Cet auteur désigne par  $\mu_i$  le rapport

$$\frac{1}{M_i} \left( \frac{\partial U}{\partial n_i} \right)_{SVn'}$$

qu'il appelle le *potentiel chimique* du composant (i). En se basant sur les équations (8) et (9) et sur d'autres, analogues, qu'il est facile d'écrire en considérant  $U$  et  $S$  comme fonctions de  $n_1$ ,  $n_2$ , ...  $n_i$ , ... et de certaines paires de variables autres que  $V$ ,  $T$ , on peut démontrer d'une manière très directe <sup>(1)</sup> que

$$(19) \quad M_i \mu_i = \left( \frac{\partial U}{\partial n_i} \right)_{SVn'} = \left( \frac{\partial (U + PV)}{\partial n_i} \right)_{SPn'} = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial n_i} \right)_{TVn'} = \left( \frac{\partial (\Psi + PV)}{\partial n_i} \right)_{TPn'}.$$

La somme  $\sum \mu_i M_i dn_i$  qui intervient dans les raisonnements de Gibbs s'identifie ainsi avec le second membre de notre équation (15). Or, il paraît évident que, tout au moins d'une manière implicite, les potentiels chimiques  $\mu_i$  sont considérés par Gibbs comme des fonctions de l'état du système, c'est-à-dire comme des grandeurs entièrement indépendantes des *variations* de température et de volume qui peuvent se trouver associées à la réaction <sup>(2)</sup>. -

Il paraît opportun de prévenir ici une confusion. Si, pour caractériser

<sup>(1)</sup> *Ann. Soc. scient. Brux.*, t. 56 (série B), pp. 26-28 (1936).

<sup>(2)</sup> C'est ce qui explique la remarque suivante de H. Le Chatelier : « C'est là en réalité une hypothèse qui revient à attribuer à chaque corps une force chimique définie, comme il possède un poids défini. » (J. W. GIBBS : *L'équilibre des systèmes chimiques*, trad. Le Chatelier, p. 15, Paris, 1899). Il est douteux que Le Chatelier ait exactement compris sur ce point l'idée de Gibbs, car la comparaison entre le potentiel chimique et le poids est boiteuse à un point de vue essentiel. En parlant de poids, sans le distinguer explicitement de la masse et sans rappeler au lecteur que le poids d'un corps déterminé varierait d'une planète à l'autre, Le Chatelier semble bien vouloir évoquer l'idée d'une constante caractéristique. Or, cette idée ne s'applique nullement au potentiel chimique, puisque ce dernier dépend, non seulement de la définition qualitative du système dont le corps considéré fait partie, mais même de l'état instantané de ce système.

l'état physique du système, nous avons recours à une paire de variables quelconques, que nous appellerons en général  $x$  et  $y$ , on peut se demander si la fonction de l'état du système que nous avons jusqu'ici représentée par  $\Psi_i$  peut s'exprimer par

$$(20) \quad \Psi_i = \left( \frac{\partial F(xy n_1 n_2 \dots n_i \dots)}{\partial n_i} \right)_{xy n'}$$

On peut montrer <sup>(1)</sup> qu'il en est effectivement ainsi, si l'on choisit comme variables, non seulement  $T$  et  $V$ , mais encore  $T$  et  $P$ ,  $S$  et  $V$  ou  $S$  et  $P$ . Mais P. Van Rijsselberghe <sup>(2)</sup> a prouvé que dans d'autres cas (par exemple avec  $P$  et  $V$ ) il n'existe aucune fonction  $F(xy n_1 n_2 \dots n_i \dots)$  satisfaisant à l'équation (20). En ce sens, il est exact d'affirmer que le choix de certaines variables exclut l'existence d'un potentiel thermodynamique correspondant. Mais quelles que soient les variables  $x$  et  $y$  employées avec  $n_1, n_2, \dots n_i \dots$  pour caractériser l'état du système, cet état reste défini sans ambiguïté. Les énergies libres moléculaires, qui sont des fonctions de l'état du système, restent donc également définies, même si on décide de les exprimer au moyen de  $x, y, n_1, n_2, \dots n_i \dots$ . Comme, d'autre part, tout changement d'état physique peut aussi bien se décrire par  $dx$  et  $dy$  ( $n_1, n_2, \dots n_i, \dots$  restant constants) que par  $dT$  et  $dV$ , la somme

$$- \sum_i N_i \Psi_i(xy n_1 n_2 \dots n_i \dots)$$

sera aussi bien indépendante de  $dx$  et de  $dy$  que la somme

$$- \sum_i N_i \left( \frac{\partial \Psi(V T n_1 n_2 \dots n_i \dots)}{\partial n_i} \right)_{TV n'}$$

était indépendante de  $dV$  et de  $dT$ . Dans l'esprit de la terminologie de Gibbs, cette somme devrait s'appeler le *potentiel chimique du système relatif à la réaction*, ou, plus simplement, le *potentiel de réaction*.

Pour van t'Hoff, qui s'inspirait directement de Helmholtz, la diminution d'énergie libre associée à une réaction constituait la mesure de cette tendance à réagir que les chimistes appelaient depuis longtemps « l'affinité » <sup>(3)</sup>. En effet, ainsi que Helmholtz l'avait souligné, la diminution de l'énergie libre représente le travail maximum qu'un système, maintenu à température constante, est capable d'effectuer à l'encontre des forces extérieures en passant d'un certain état initial en un certain état final (et qu'il n'effectue d'ailleurs que si ce passage est réversible). Ce travail

<sup>(1)</sup> Voir par exemple : *Ann. Soc. scient. Brux.*, t. 56 (série B), p. 24 (1936).

<sup>(2)</sup> *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 2 décembre 1935.

<sup>(3)</sup> Pour l'histoire de la notion d'affinité, voir O. SACKUR : *Die chemische Affinität und ihre Messung*. (Sammlung Wissenschaft), Braunschweig (1908), ainsi que : *Lehrbuch der Thermochemie und Thermodynamik* (2<sup>me</sup> édit. par Cl. Simson), pp. 234 et suiv., Berlin (1928).

maximum peut servir à mesurer les réactions mécaniques que le système, dans certaines conditions, serait susceptible d'opposer aux forces extérieures. Cela étant, l'idée de Van t'Hoff se réduit à identifier ces réactions mécaniques avec les forces affinitaires. Si cette identification peut paraître légitime, ce ne sera que dans le cas particulier où l'état initial et l'état final ne diffèrent entre eux, ni par le volume, ni par la température, mais uniquement par la composition chimique du système. Dans le cas général, la diminution élémentaire de l'énergie libre peut s'exprimer au moyen des équations (14<sup>bis</sup>) et (14), dont la combinaison fournit la relation :

$$-d\Psi = SdT + PdV - (\sum N_i \Psi_i) VW dt.$$

Cette égalité fait distinguer dans la diminution élémentaire de l'énergie libre une partie due à la variation de température, une partie due à la variation de volume et une partie due à la réaction chimique. Il est clair que cette dernière partie seule, laquelle s'exprime par

$$-d\Psi - SdT - PdV = -(\sum N_i \Psi_i) VW dt$$

peut servir à la mesure de l'affinité. Encore faut-il qu'elle soit rapportée à la transformation chimique d'une quantité définie de matière. Le choix de cette transformation unitaire peut s'effectuer de plusieurs manières.

Par exemple, on peut songer à mesurer l'affinité par la diminution d'énergie libre qui correspond (à volume et température invariables) à la consommation ou à la formation de  $N_i$  molécules-grammes de chaque composant. Puisque  $dn_i/N_i = VW dt$ , on parvient ainsi à la définition de l'affinité qui a été récemment adoptée par Th. De Donder <sup>(1)</sup> :

$$\frac{-d\Psi - SdT - PdV}{VW dt} = -\sum N_i \Psi_i.$$

Cette affinité, définie par De Donder, se confond, comme on voit, avec le potentiel réactionnel qui est à la base de la thermodynamique chimique de Gibbs. Elle est le résidu d'une sorte d'épuration mathématique de ce concept d'affinité, encore assez grossier, que l'on rencontre dans les écrits de Van t'Hoff. Il y a lieu seulement de noter, à un point de vue purement formel, que De Donder a préféré définir l'affinité en l'égalant au premier plutôt qu'au second membre de l'égalité (18). Nous verrons dans la troisième partie de cette étude que ce choix, tout en n'offrant qu'un intérêt formel dans le cas des systèmes uniformes, est cependant désavantageux, en ce sens qu'il exclut la généralisation de cette notion d'affinité dans le cas des systèmes non uniformes.

Il existe encore une autre manière possible de définir la quantité de matière dont la transformation chimique s'accompagnera de cette diminution d'énergie libre qu'on adoptera comme mesure d'affinité. On peut

(1) DE DONDER : L'Affinité (rédict. P. Van Rijsselberghe), p. 19, Paris (1936).



notamment considérer la quantité de matière transformée par unité de temps dans le cours de la réaction réelle. Cela revient à définir l'affinité par la grandeur :

$$\frac{dQ'}{dt} = - V W \sum N_i \Psi_i$$

C'est cette définition de l'affinité, sous la forme où elle est exprimée par le second membre de la dernière équation, qui nous paraît la plus adéquate et que nous adopterons. Cependant, pour ne pas trop nous écarter de la terminologie déjà consacrée par les nombreuses publications de De Donder, nous appellerons *affinité thermodynamique* l'affinité définie par cet auteur (c'est-à-dire le potentiel réactionnel de Gibbs) et nous appellerons *affinité réelle* le produit de l'affinité thermodynamique par la vitesse de réaction et par le volume. L'affinité réelle a donc les dimensions d'une puissance. C'est sous ce nom que cette grandeur est occasionnellement mentionnée dans les travaux de De Donder.

Le principal inconvénient que nous verrions à accepter telle quelle la terminologie proposée par De Donder se dégage des réflexions suivantes. Si l'affinité, c'est-à-dire la grandeur par laquelle doit se mesurer la tendance du système à réagir, est une fonction de l'état « statique » du système, indépendante de la vitesse de réaction, cette dernière peut être nulle sans que l'affinité s'annule en même temps. C'est là au fond un paradoxe qui ne peut se soutenir qu'à la condition d'introduire l'idée d'une espèce de « frottement » capable d'enrayer la marche de la réaction en dépit des « véritables » forces affinitaires. Cette distinction entre les forces chimiques actives et certaines résistances passives remonte à Gibbs et a été fort accentuée par Duhem. Elle est inspirée par l'analogie avec les phénomènes mécaniques étudiés à l'échelle macroscopique et elle devait, à ce titre, plaire à l'ingénieur qu'était H. Le Chatelier<sup>(1)</sup>. Cependant, au point de vue moderne, l'analogie paraît bien artificielle. La réaction chimique est le résultat statistique d'un grand nombre de processus élémentaires, dont chacun met en jeu une ou quelques molécules. Or, rien de ce que nous savons au sujet de ces processus élémentaires, que leur aspect quantique

(1) J. W. GIBBS : Équilibre des systèmes chimiques, Traduct. Le Chatelier, pp. VII et VIII, Paris (1899) : « Bien des chimistes méconnaissent encore le rôle des résistances passives et sont amenés à contester les lois les plus certaines de la mécanique chimique ; ils se trouvent dans la situation d'ingénieurs qui voudraient appliquer à leurs machines les principes de la mécanique rationnelle en faisant systématiquement abstraction du frottement ». Qu'il nous soit permis de faire observer à propos de cette remarque de Le Chatelier que ce qui importe sans doute ce n'est pas tant de distinguer formellement les forces passives des forces actives, que simplement d'en tenir compte (fût-ce même *sans* les considérer comme formant une catégorie spéciale). C'est précisément ce que nous proposons de faire, à la différence de De Donder, lequel distingue les forces de frottement, mais uniquement pour exclure leurs effets dans sa définition de l'affinité.

semble définitivement soustraire aux images macroscopiques, ne suggère l'opportunité d'une distinction entre une force tendant à provoquer la réaction et une résistance antagoniste.

Il vaut donc mieux, en effet, définir comme affinité réelle une grandeur qui s'annule seulement avec la vitesse de réaction et qui cesse dès lors de se présenter comme une caractéristique purement thermodynamique du système.

Ce point de vue peut se justifier aussi bien en un langage un peu différent. Tous les auteurs actuels seront d'accord, en principe, pour définir l'affinité par le degré d'irréversibilité propre au phénomène chimique considéré. Nous trouvons naturel d'adopter comme mesure de cette irréversibilité la chaleur non compensée débitée par unité de temps. Ainsi nous nous conformons strictement à la méthode originale de Clausius, qui étudie les modifications réelles des systèmes dans le temps croissant. De Donder a estimé au contraire qu'il convenait de faire abstraction du temps et de rapporter la chaleur non compensée à l'étape franchie par la transformation chimique <sup>(1)</sup>, c'est-à-dire à  $dn_i/N_i$ . Cela revient à envisager l'irréversibilité d'une réaction virtuelle (c'est-à-dire simplement possible au point de vue stoechiométrique) au lieu de l'irréversibilité de la réaction réelle. Au sens de De Donder, l'affinité est l'irréversibilité qu'une réaction manifesterait si, par ailleurs, cette réaction pouvait avoir lieu. Le « par ailleurs » exprime précisément ce facteur affinitaire essentiel qui fait défaut dans la définition critiquée <sup>(2)</sup>.

Un système où l'affinité réelle est nulle, doit nous apparaître comme étant véritablement en équilibre, car, pour un tel système, le degré d'irréversibilité se réduit à zéro (équat. (17)). Il est bien entendu que les états d'équilibre peuvent être *relatifs* et qu'il importe de marquer la différence entre les états d'équilibre relatif (ou états de « faux équilibre » d'après Duhem) et l'état d'équilibre *absolu*. Ce dernier est déterminé par la condition

$$\sum N_i \Psi_i = 0$$

Quand cette condition est satisfaite, l'irréversibilité  $dQ'/dt$  s'annule en vertu de (17), mais alors toute réaction chimique se trouve par le fait

(1) De Donder désigne par  $d\xi$  le rapport  $dn_i/N_i$ , où  $N_i$  est considéré comme une grandeur algébrique qui sera négative toutes les fois qu'il s'agit d'un composant consommé par la réaction.

(2) Nous n'avons développé ici nos remarques sur la définition de l'« affinité » que par égard pour le point de vue de De Donder. Quant à nous, nous ne verrions aucune difficulté à nous en tenir simplement à l'exposé original de Gibbs. Nulle part ce dernier ne paraît avoir songé à établir une relation entre l'affinité et les fonctions thermodynamiques dont on peut bien penser qu'il n'ignorait pas les propriétés. C'est que rien n'empêche de considérer l'aspect quantitatif de la notion d'affinité comme s'exprimant par la simple définition de la vitesse de réaction, quitte d'ailleurs à constater que, pour le moment, cette grandeur ne nous est encore connue que d'une manière empirique.

même exclue, puisque toute réaction chimique se poursuivant avec une vitesse différente de zéro constituerait nécessairement un processus irréversible. En l'état d'équilibre absolu le produit  $VW\sum_i \Psi_i$  est donc « doublement » nul, si l'on peut exprimer ainsi le fait que les deux facteurs  $W$  et  $\sum_i \Psi_i$  sont nuls séparément. L'état d'équilibre absolu jouit du privilège de la stabilité entendue dans le sens suivant : au voisinage d'un état d'équilibre absolu le système ne peut évoluer que vers cet état. En effet, si la vitesse de réaction est positive, le degré d'irréversibilité  $dQ/dt$  est nécessairement positif lui aussi. En vertu de (17) la somme totale  $\sum_i \Psi_i$  doit donc être négative. Cela revient à dire que la somme partielle relative aux corps engendrés par la réaction est plus petite en valeur absolue que la somme partielle relative aux corps consommés. Par conséquent, la somme totale  $\sum_i \Psi_i$  doit nécessairement se rapprocher de zéro par les progrès même de la réaction ; c'est dire que le système évolue vers son état d'équilibre absolu.

En considérant comme des états d'équilibre véritables, quoique relatifs, certains états que, dans la thermodynamique de Van t'Hoff, on n'aurait peut-être pas considérés comme des états d'équilibre, on évite une difficulté qui serait bien embarrassante. Soit un mélange d'hydrogène et d'azote ( $3H_2 + N_2$ ) à la température ordinaire. Si nous déclarons que ce système n'est pas dans un état d'équilibre véritable (sous prétexte que l'affinité thermodynamique ne s'annule que pour un mélange contenant une fraction prépondérante d' $NH_3$ ), nous encourons une grave contradiction. Tous les traités de chimie physique décrivent, en effet, une suite d'opérations fictives, strictement réversibles (effectuées à l'aide de pistons semi-perméables et d'une chambre de réaction auxiliaire), susceptibles de transformer en ammoniac le mélange stoechiométrique d'hydrogène et d'azote. On supprime cette contradiction en appelant l'état du mélange  $3H_2 + N_2$ , non pas un état de « faux équilibre » (comme le faisait Duhem) mais un état d'équilibre relatif, parfaitement compatible avec la réversibilité des processus dont il est le point de départ ou le terme.

Il faut évidemment se garder d'attacher une importance excessive à ces questions de mots, où des points de vue différents peuvent tour à tour paraître décisifs. Il est peut-être plus instructif de rechercher ce que devient le degré d'irréversibilité dans le cas général d'un système où la température et les concentrations varient d'un point à l'autre.

### III. — SYSTÈMES NON UNIFORMES

L'importance de l'étude des systèmes non uniformes résulte du fait qu'il est au fond contradictoire de considérer un système à température uniforme comme absorbant de la chaleur. Celle-ci ne peut, en effet, pénétrer

dans le système et s'y propager qu'à la faveur d'un gradient de température dont nous aurons à rechercher l'influence sur le degré d'irréversibilité des transformations.

La définition générale de l'accroissement d'entropie pendant l'intervalle de temps  $dt$  s'impose et ne donne lieu à aucune difficulté après ce que nous avons dit plus haut sur la définition de l'entropie d'un système ouvert. Considérant comme un petit système ouvert chaque élément de volume d'un système fermé, nous sommes amenés à définir la variation de l'entropie du système total par

$$(21) \quad dS = \int_V ds dV$$

Dans cette intégrale,  $s$  désigne l'entropie par unité de volume du système ouvert contenu à l'instant  $t$  dans l'élément de volume  $dV$ . L'intégration est étendue au volume total  $V$  occupé par le système. Dans toute la suite ce volume  $V$  sera considéré comme *constant*. On supposera en outre que la surface délimitant le système total est rigide et qu'à l'intérieur du système les vitesses de convection sont suffisamment faibles pour que l'énergie cinétique puisse être négligée. Toutefois, si, dans un système à volume variable, les variations de volume ne sont pas très grandes, le travail correspondant des forces extérieures sera petit à côté des autres variations d'énergie et les raisonnements précédents resteront valables à titre de première approximation.

Soit  $C_i$  la concentration locale du composant (i), c'est-à-dire le nombre de molécules-grammes du corps (i) par unité de volume à l'intérieur de  $dV$ . Nous pouvons maintenant appliquer l'équation (9) en supprimant au second membre de cette équation le terme en  $dV$  et en supprimant l'indice  $V$  dans les autres termes, puisque chaque volume élémentaire  $dV$  intervenant dans l'intégrale (21) doit être considéré comme constant, de même que le volume  $V$ . L'équation (21) devient ainsi

$$(22) \quad dS = \int_V \left\{ \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_c dT + \sum_i s_i dC_i \right\} dV$$

où  $s_i$  est l'entropie moléculaire partielle du composant (i) à l'intérieur de  $dV$  et où l'indice  $c$ , remplaçant l'indice  $n$ , signifie que toutes les concentrations sont fixes.

Cherchons maintenant la définition la plus naturelle de la chaleur non compensée dans le cas d'un système non uniforme. A cet effet, nous posons <sup>(1)</sup> :

---

<sup>(1)</sup> En évitant de considérer la chaleur non compensée relative à un élément de volume. Il n'y a pas lieu, en effet, de parler de la chaleur non compensée d'un système ouvert.



$$dQ' = \int_v T ds dV - \int_v T dq'' dV$$

où  $dq'' dV$  est la chaleur réduite, relative à la transformation subie par l'élément de volume  $dV$ . En remplaçant  $ds$  par sa valeur, on obtient

$$dQ' = \int_v T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_c dT dV + \int_v (T \sum s_i dC_i) dV - \int_v T dq'' dV$$

Mais, conformément à l'équation (10<sup>a</sup>),

$$T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_c = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_c$$

et, puisque les éléments de volume sont fixes,

$$\left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_c dT dV = du dV - (\sum u_i dC_i) dV$$

Par conséquent,

$$(23) \quad dQ' = \int_v du dV - \int_v \sum (u_i - Ts_i) dC_i dV - \int_v T dq'' dV$$

Au second membre de cette équation, la première intégrale représente la chaleur totale  $dQ$  absorbée par le système. En effet, le volume de chaque élément de volume restant fixe, on a  $\int du dV = dU$ , et, le volume total restant constant,  $dU = dQ$ . Par conséquent

$$(24) \quad \int_v du dV = dQ.$$

Afin d'obtenir la valeur de la troisième intégrale au second membre de l'équation (23), commençons par préciser la signification de  $dq''$ , car la chaleur réduite n'a été définie jusqu'ici que dans le cas d'un système fermé. En désignant par  $k$  la conductivité thermique en un point de la surface du système total, nous pouvons, conformément au théorème de Clausius généralisé, exprimer comme suit la chaleur réduite  $dQ''$  absorbée par le système total

$$(25) \quad dQ'' = \int_{\sigma} \frac{k \text{ grad } T dt}{T} \vec{n} d\sigma$$

en représentant par  $\vec{n}$  un vecteur unitaire, normal à l'élément de surface  $d\sigma$ . Appliquant le théorème d'Ostrogradski sur la divergence, nous pouvons remplacer l'intégrale étendue à la surface  $\sigma$ , par une intégrale étendue au volume  $V$ , et écrire

$$(26) \quad dQ = \int_v \operatorname{div} \left( \frac{k \operatorname{grad} T dt}{T} \right) dV$$

Cette transformation n'implique aucune hypothèse physique sur les systèmes élémentaires ouverts, et suppose seulement que la conductivité thermique puisse se définir en chaque point.

Comme, d'autre part, il faut définir  $dq''$  de manière à satisfaire à l'identité

$$(27) \quad dQ'' = \int_v dq'' dV$$

nous voyons que

$$(28) \quad dq'' = \operatorname{div} \frac{k \operatorname{grad} T dt}{T}$$

Mais la divergence d'un vecteur au point P multipliée par l'élément de volume qui contient ce point est égale au flux du vecteur par la surface qui délimite l'élément de volume  $dV$ . L'équation (28) montre par conséquent que notre définition de la chaleur réduite, relative au cas d'un système fermé non uniforme, reste applicable au système ouvert qui est à l'instant  $t$  contenu dans l'élément de volume  $dV$ .

La valeur de  $dq''$  fournie par l'équation (28) peut maintenant être substituée en l'équation (23) qui devient ainsi, en tenant compte également de (24) :

$$(29) \quad dQ = - \int_v \sum (u_i - Ts_i) dC_i dV + dQ - \int_v T \operatorname{div} \left( \frac{k \operatorname{grad} T dt}{T} \right) dV$$

Nous pouvons exprimer  $dQ$  en étendant à la surface du système l'intégrale du flux du vecteur  $k \operatorname{grad} T dt$  (où  $dt$  peut être traité comme constant). Nous obtenons ainsi

$$dQ = \int_v (k \operatorname{grad} T dt) \vec{n} d\sigma = \int_v \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T dt) dV$$

En développant les divergences des produits d'un vecteur par un ou deux scalaires,  $k \operatorname{grad} T$  et  $kT^{-1} \operatorname{grad} T$ , on obtient, en désignant par  $\nabla^2$  le laplacien :

$$(30) \quad dQ = \int_v k \nabla^2 T dt dV + \int_v \operatorname{grad} T \operatorname{grad} k dt dV$$

$$(31) \quad \int_v T \operatorname{div} \left( \frac{k \operatorname{grad} T dt}{T} \right) dV = \int_v k \nabla^2 T dt dV + \int_v \operatorname{grad} T \operatorname{grad} k dt dV + \int_v T k \operatorname{grad} T \operatorname{grad} T^{-1} dt dV$$

Puisque  $\text{grad } T^{-1} = -T^{-2} \text{ grad } T$ , l'équation (29) peut s'écrire, en remplaçant d'ailleurs  $u_i - Ts_i$  par  $\psi_i$ ,

$$(32) \quad dQ' = \int_v \left( \frac{k}{T} \text{grad}^2 T - \sum_i \psi_i \frac{dC_i}{dt} \right) dt dV$$

Représentons par le vecteur  $\vec{v}_i$  la vitesse moyenne avec laquelle cheminent, à l'instant  $t$ , en un point donné du système, les molécules du corps (i), et par  $\vec{W}_r$  la vitesse de chaque réaction chimique indépendante. Nous aurons

$$(33) \quad \frac{dC_i}{dt} = \sum_i N_{ir} \vec{W}_r - \text{div} (\vec{v}_i C_i)$$

L'équation (32) prendra ainsi la forme plus explicite

$$(34) \quad \frac{dQ'}{dt} = \int_v \left\{ \frac{k}{T} \text{grad}^2 T + \sum_i \psi_i \text{div} (\vec{v}_i C_i) - \sum_i \sum_i N_{ir} \psi_i \vec{W}_r \right\} dV.$$

Le degré d'irréversibilité de la transformation du système total, et aussi de la transformation du système ouvert, infinitésimal, contenu en chaque élément de volume constant, se présente ainsi comme une somme de trois termes. Les deux premiers représentent le degré d'irréversibilité des phénomènes physiques, le troisième représente le degré d'irréversibilité chimique.

La définition que De Donder a proposé pour l'affinité (thermodynamique) en l'égalant à  $(VW)^{-1} dQ'/dt$  ne peut donc pas se généraliser. Si nous voulions la maintenir dans le cas général d'un système dont la température et les concentrations ne sont pas uniformes, nous inclurions en l'affinité les termes représentant l'irréversibilité des échanges de température internes, des processus de diffusion et d'égalisation de pression qui s'accomplissent au sein du système en même temps que la réaction chimique. Cependant, même dans le cas d'une température non uniforme, le potentiel de réaction local  $-\sum_i N_i \psi_i$  peut être appelé sans inconvénient l'affinité thermodynamique en l'élément de volume  $dV$ . Nous n'avons pas démontré, mais nous considérons comme probable, que l'affinité réelle correspondante,  $-\sum_i N_i \psi_i W dV$ , est toujours positive.

Étudions d'un peu plus près les deux termes représentant le degré d'irréversibilité physique des processus qui se déroulent dans un système non uniforme.

Le terme

$$\int_v \left( \frac{k}{T} \text{grad}^2 T \right) dV$$

exprime l'irréversibilité purement thermique. Il est nécessairement posi-

tif, à moins d'admettre que  $k$  puisse être négatif, c'est-à-dire que la chaleur puisse se transporter par conductivité d'une région plus froide vers une région plus chaude du système. Lorsque  $\text{grad } T$  est petit,  $\text{grad}^2 T$  est petit du second ordre. Nous montrerons sur un exemple particulièrement simple que l'irréversibilité peut alors être négligée, comme elle l'a toujours été jusqu'ici, lorsqu'on appliquait aux systèmes à température pratiquement uniforme les équations démontrées pour les systèmes à température strictement uniforme.

Considérons une sphère initialement uniforme au point de vue de la température, de la pression et de la composition chimique. Supposons infiniment lents les processus de diffusion et les réactions chimiques et supposons nul le coefficient de dilatation thermique. Si cette sphère est brusquement plongée dans un bain de température plus élevée, il s'établira à l'intérieur de la sphère un gradient de température, qui, en chaque point, ne dépendra que de la distance  $r$  de ce point au centre de la sphère. Par conséquent, la différence

$$dQ - \int_v T dq'' dV$$

sera négligeable à côté de  $dQ$ , puisque (à cause de la constance de  $k$ )

$$\frac{dQ}{dt} = \int_v \text{div} (k \text{ grad } T) dV = \int_v k \nabla^2 T dV = \int_v k \left( \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} \right) dV,$$

que

$$\frac{d^2 T}{dr^2} > 0,$$

et que

$$dQ - \int_v T dq'' dV = dt \int_v \frac{k}{T} \left( \frac{dT}{dt} \right)^2 dV.$$

On peut ainsi remplacer  $\int_v T dq'' dV$  par  $dQ$  et écrire

$$dQ' = \int_v T ds dV - dQ$$

alors même que la température n'est pas rigoureusement uniforme.

Considérons enfin le terme

$$\int_v \left\{ \sum_i \psi_i \text{div} (\vec{v}_i C_i) \right\} dV.$$

En l'absence de réaction chimique, ce terme représente la totalité de l'intégrale

$$- \int_v \left( \sum_i \psi_i \frac{dC_i}{dt} \right) dV = -J.$$



Il exprime la vitesse avec laquelle l'énergie libre totale diminue par le fait de l'égalisation des concentrations. En absence de réaction chimique, pour un système fermé,

$$\int_v \sum \frac{dC_i}{dt} dV = 0,$$

de sorte que, si pour certains éléments de volume  $dC_i/dt$  est positif, cette dérivée doit être négative pour d'autres éléments de volume.

Cela étant, considérons l'intégrale  $J$  comme une somme d'autant d'intégrales  $J_1, J_2, \dots J_i \dots$  qu'il y a de composants. Considérons ensuite chaque intégrale  $J_i$  comme une somme de deux intégrales  $J'_i$  et  $J''_i$ , la première étendue à tous les éléments de volume où  $dC_i/dt$  est positif, la deuxième à tous les éléments de volume où  $dC_i/dt$  est négatif. La condition pour que l'on ait  $-J = -\sum J'_i - \sum J''_i > 0$  est que les valeurs de  $\psi_i$  figurant dans les intégrales  $J''_i$  soient, en moyenne, plus grandes que les valeurs de  $\psi_i$  figurant dans les intégrales  $J'_i$ . Si l'on suppose que les  $\psi_i$  sont des fonctions croissantes des  $C_i$ , cela revient à dire que la condition  $-J > 0$  exprime une égalisation générale des concentrations.

En particulier, si la température du système est uniforme, et si ce système se réduit à un corps pur de masse moléculaire  $M$ , l'énergie libre moléculaire s'exprimera par  $\mu M$  et la concentration par  $p/M$ , en désignant par  $p$  la densité locale. Par conséquent

$$J = \int_v \mu \frac{dp}{dt} dV.$$

Il suffit alors que  $\mu$  soit une fonction croissante de  $p$  et  $p$  une fonction croissante de la pression, pour que la condition  $-J > 0$  soit liée à l'égalisation générale des pressions au cours du temps. Il est bien entendu que, si l'énergie cinétique par unité de masse est suffisante dans certaines régions du système, le transport de matière pourra s'effectuer dans ces régions de manière à accentuer temporairement une différence de pression. Le système est alors parcouru par des ondes mécaniques et l'irréversibilité du phénomène n'est plus mesurée que par l'amortissement progressif de ces ondes <sup>(1)</sup>. Le maximum d'irréversibilité correspond au cas d'une égalisation de pression apériodique (critique). Il est instructif de comparer, au point de vue où nous venons de nous placer, l'irréversibilité purement thermique avec l'irréversibilité purement mécanique. Il n'existe pas d'ondes thermiques. L'égalisation des températures constitue toujours un phénomène apériodique, présentant un maximum d'irréversibilité.

---

(1) En définissant le degré d'irréversibilité par  $dQ/dt$ .

## CONCLUSIONS

1° Dans les systèmes homogènes (c'est-à-dire offrant à chaque instant une distribution uniforme de la température et des concentrations) il convient de définir l'affinité *réelle* de manière qu'elle s'annule en même temps que la vitesse de réaction. On peut l'identifier avec le degré d'irréversibilité du processus chimique (chaleur non compensée par unité de temps) en lui attribuant ainsi les dimensions d'une puissance. Quant au potentiel de réaction, grandeur énergétique introduite par Gibbs et considérée par De Donder comme l'expression appropriée de l'affinité, on peut sans inconvénient l'appeler l'affinité *thermodynamique*, en évitant par là toute confusion avec l'affinité réelle.

2° Dans le cas des systèmes non homogènes, on voit s'ajouter à l'irréversibilité des transformations chimiques, considérées comme se déroulant dans le temps, certains termes qui traduisent l'irréversibilité des transports internes de chaleur et de matière. L'irréversibilité totale ne s'identifie donc plus avec l'affinité.

# Calcul de la fonction potentielle et des fréquences fondamentales des molécules $C_2H_xD_y$ ( $x+y=4$ )

PAR

YONG-LI TCHANG

RÉSUMÉ : Reprenant des travaux antérieurs, on a calculé une fonction potentielle quadratique unique comprenant le nombre maximum de constantes compatibles avec la symétrie du système, soit quinze pour la molécule d'éthylène et ses six substitués, où des atomes d'hydrogène sont remplacés par des atomes de deutérium. Dans les trente cas où la comparaison du calcul avec des résultats expérimentaux obtenus pour les substitués est possible, la concordance entre les fréquences de vibration calculées et observées se fait toujours à moins de 1,4 % près ; dans la majorité des cas, l'écart ne dépasse 0,5 %. L'influence de l'anharmonicité des vibrations est importante ; on en a tenu compte par une correction des masses des atomes d'hydrogène et de deutérium, pour lesquelles on a adopté les valeurs 1,088 et 2,126 au lieu de 1,008 et de 2,014. Cette correction, suggérée par la théorie de l'oscillateur anharmonique, paraît bien légitimée par les nombreuses concordances entre les résultats du calcul et de l'expérience. Sans cette correction de masses, ou par des valeurs nettement différentes de celles adoptées, on n'a pas pu aboutir à un accord satisfaisant.

L'étude théorique de modes fondamentaux de vibration de la molécule de l'éthylène a été entreprise en détail par MM. Manneback et Verleysen<sup>(1)</sup>. Ils ont représenté l'énergie potentielle  $U$  de la molécule par une fonction quadratique, en coordonnées symétriques. Cette fonction peut être décomposée en une somme de quatre termes  $U_i$  indépendants les uns des autres :

$$2U_i = A_i Z_i^2 + B_i \xi_i^2 + C_i \eta_i^2 + 2D_i Z_i \xi_i + 2E_i \xi_i \eta_i + 2F_i Z_i \eta_i \quad (1)$$

où  $i = 1, 2, 3$  et  $4$  correspondent respectivement aux modes bien connus  $S_1$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  et  $S_2$ . La coordonnée symétrique  $\xi$  se rapporte aux déplacements des hydrogènes suivant la direction de l'axe C—C, et  $\eta$  à la direction perpendiculaire,  $Z$  se rapporte aux déplacements des carbones.

Les paramètres  $A, B, C, D, E$  et  $F$  étaient choisis de manière à rendre compte des fréquences des vibrations de  $C_2H_4$  observées par Bonner<sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> *Nature*, **138**, 367 (1936) ; *Ann. Soc. sc. Brux. B*, **56**, 349 (1936) et *I*, **57**, 31 (1937) ; *Jour. Chem. phys.*, **5**, 989 (1937).

<sup>(2)</sup> *Jour. Amer. Chem. Soc.*, **58**, 34 (1936).

Ils ont calculé avec cette fonction les fréquences de vibration des molécules  $C_2D_4$  et  $C_2H_2D_2$  provenant de substitution totale ou partielle des hydrogènes par des deutériums.

Avec cette même fonction, nous avons calculé avec M. Lemaitre les fréquences de la molécule monosubstituée  $C_2H_3D$  <sup>(1)</sup>, en vue de vérifications expérimentales.

On connaît, depuis lors, une trentaine de raies Raman de ces molécules grâce aux nombreuses expériences du professeur M. de Hemptinne et ses collaborateurs <sup>(2)</sup>. On connaît également quelques raies d'infra-rouge de la molécule complètement lourde, grâce aux observations de M. Sutherland <sup>(3)</sup>.

La comparaison des fréquences calculées et des fréquences observées fait apparaître des écarts systématiques. Les erreurs vont en croissant à mesure que les molécules sont plus riches en deutérium. Les erreurs commises sur les fréquences du monosubstitué ne dépassent pas 1,2 % ; celles des bisubstitués dépassent déjà 3 % ; tandis que celles de la molécule tétrasubstituée atteignent presque 6 %, ces erreurs élevées se limitant d'ailleurs à quelques fréquences seulement.

La cause d'erreur est évidente. Les auteurs eux-mêmes ont déjà précisé que : « Il est probable que les termes supérieurs d'anharmonicité négligés, parce qu'inconnus dans la fonction potentielle, aient, sur les fréquences calculées, une répercussion plus grande que la présence de certains termes de couplage dans la fonction potentielle limitée à ses termes quadratiques ». <sup>(4)</sup>

Une autre cause d'erreur moins importante provient de ce que les fréquences de  $C_2H_4$  qu'ils ont adoptées sont mesurées dans des états physiques différents. Les raies de  $S_1$ ,  $A_1$  et  $A_2$  sont mesurées à l'état de vapeur, tandis que celles de  $S_2$  sont mesurées dans le liquide.

Nous allons maintenant montrer un procédé très simple, qui, tout en conservant absolument la même forme de fonction potentielle qu'ils ont adoptée, permet cependant de tenir compte de l'anharmonicité qu'ils ont négligée.

Il existe des relations très simples entre les fréquences  $\nu_H$  et  $\nu_D$  des deux molécules analogues  $C_2H_4$  et  $C_2D_4$ . En absence de l'anharmonicité, le rapport des produits des fréquences de ces deux molécules ne dépend que de masses de l'hydrogène et du deutérium. On trouve les relations suivantes :

---

<sup>(1)</sup> *Nature*, **139**, 1411 (1937) ; *Ann. Soc. sc. Brux. I*, **57**, 120 (1937).

<sup>(2)</sup> *Nature*, **140**, 323 (1937).

<sup>(3)</sup> Résultats aimablement communiqués par l'auteur.

<sup>(4)</sup> Il y a aussi à tenir compte du fait important que, dans les travaux cités, les données expérimentales n'étaient pas en nombre suffisant pour déterminer sans ambiguïté toutes les 15 constantes de la fonction potentielle, spécialement les deux constantes de couplage  $f_c$  et  $\gamma_c$ . C'est sur la fréquence située vers 1500 à 1600  $cm^{-1}$  que cette indétermination a le plus d'effet.



$$\begin{aligned}
 &\text{pour le mode } S_1 & \frac{\Pi v_H}{\Pi v_D} &= \frac{m_D}{m_H} \\
 &\text{pour les modes } A_1 \text{ et } A_2 & \frac{\Pi v_H}{\Pi v_D} &= \sqrt{\frac{m_D \mu_D}{m_H \mu_H}} \\
 &\text{pour le mode } S_2 & \frac{\Pi v_H}{\Pi v_D} &= \sqrt{\frac{m_D \mu'_D}{m_H \mu'_H}}
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{\Pi v_H}{\Pi v_D}} \right\} \quad (2)$$

avec  $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{2}{M}$   $\frac{1}{\mu'} = \frac{1}{m} + \left[ 1 + \frac{4l^2}{L^2} + \frac{4l}{L} \cos \alpha/2 \right] \frac{2}{M}$

où  $L$  est la distance C-C ;  $l$  est la distance C-H ;  $\alpha$  est l'angle HCH :  $m_H$ ,  $m_D$  et  $M$  sont les masses atomiques de l'hydrogène, du deutérium, et du carbone.

Mais à cause de l'anharmonicité, aucune de ces relations n'est satisfaite exactement par les fréquences observées.

Nous précisons ici que les données de  $S_1$  et  $S_2$  sont des fréquences Raman, mesurées à l'état liquide par M. de Hemptinne. Les trois fréquences de modes  $A_1$  et  $A_2$  de  $C_2D_4$  sont mesurées dans l'infra-rouge à l'état de vapeur par Sutherland. Les quatre fréquences de  $C_2H_4$ , de modes  $A_1$  et  $A_2$  sont les anciennes mesures de Bonner, également à l'état de vapeur.

TABLEAU I

	$S_1$	$A_2$	$A_2$	$S_2$
$C_2H_4$	1621 cm <sup>-1</sup> 3007 1341	2988 cm <sup>-1</sup> 1444	3107 cm <sup>-1</sup> 949,7	3072 cm <sup>-1</sup> 950
$C_2D_4$	1515 cm <sup>-1</sup> 2251 981	2192,3 cm <sup>-1</sup> 1077,4	2335 ± 5 cm <sup>-1</sup> ?	2304 cm <sup>-1</sup> 780
$R_t$	1,998	1,868	1,868	1,666
$R_e$	1,954	1,827	—	1,624
$R_s$	1,954	1,824	1,824	1,629

Dans le Tableau I,  $R_t$  représente les valeurs numériques du rapport des produits de fréquences, tel que la théorie l'exige, calculées avec le deuxième membre des équations (2).  $R_e$  représente le rapport effectif, calculé avec les raies expérimentales; on voit très clairement leur discordance.

C'est justement pour réconcilier ce fait que M. Lemaître nous a proposé de faire une correction sur les masses de l'hydrogène et du deutérium; le choix de ces masses devrait pouvoir rendre compatibles les quatre équations (2).

Il a été démontré par M. Manneback <sup>(1)</sup> que, dans le cas des oscillateurs simples comme CH et CD, les constantes spectroscopiques d'anharmonicité sont inversement proportionnelles aux racines carrées des masses réduites des oscillateurs. Dans le cas présent, pour ne pas modifier la masse du carbone, nous adoptons pour les masses corrigées :

$$m'_H = m_H \left( 1 + \frac{c}{\sqrt{m_H}} \right) \quad m'_D = m_D \left( 1 + \frac{c}{\sqrt{m_D}} \right)$$

Le rapport des masses corrigées est imposé par les raies de mode  $S_1$ , on a  $c = 0,080$  et  $m'_H = 1,088$   $m'_D = 2,126$

au lieu des valeurs 1,008 et 2,014. Nous appellerons désormais ces masses « masses spectroscopiques ». Dans la suite, nous les écrivons sans prime.

Dans le Tableau I,  $R_s$  représente les valeurs numériques du second membre des équations (2), calculées avec les masses spectroscopiques. On voit que l'accord entre  $R_e$  et  $R_s$  est établi; une erreur d'un nombre d'ondes sur les mesures permet d'expliquer les petits écarts.

Avec ces masses spectroscopiques, nous pouvons prédéterminer immédiatement la raie de  $C_2D_4$  qui manque dans la mesure de Sutherland. D'après notre calcul, cette raie de mode  $A_2$  doit avoir une fréquence de  $693 \pm 2 \text{ cm}^{-1}$ .

Dans la suite, nous allons employer ces masses spectroscopiques pour construire la fonction potentielle de la molécule de  $C_2H_4$ . L'introduction de ces masses se justifie par la cohérence de l'ensemble des résultats.

Les modes  $S_2$ ,  $A_1$  et  $A_2$  ne dépendent chacun que de trois paramètres réellement indépendants. Nous avons maintenant, pour chacun de ces modes, deux fréquences expérimentalement déterminées pour  $C_2H_4$  et deux fréquences pour  $C_2D_4$ . Grâce aux masses spectroscopiques, nous avons justement trois équations, au lieu de quatre équations incompatibles, entre ces trois paramètres. Leur détermination n'offre aucune difficulté. Nous notons seulement que nous avons pris pour les raies  $A_2$  de

(1) *Ann. Soc. sc. Brux. B*, 55, 237 (1935).

$C_2D_4$ , 2340 et  $691\text{ cm}^{-1}$ . Dans la limite d'erreur  $\pm 5\text{ cm}^{-1}$  sur la raie  $2335\text{ cm}^{-1}$ , nous avons choisi celle qui donne moins d'erreur sur la raie du bisubstitué *cis*,  $1567\text{ cm}^{-1}$ .

Le mode  $S_1$  dépend de six paramètres indépendants, mais les trois fréquences de  $C_2H_4$  et les trois autres de  $C_2D_4$  donnent six équations incompatibles. Grâce aux masses spectroscopiques, ces équations se réduisent à cinq. Il subsiste donc une indétermination. Comme  $S_1$  est le mode le plus important parmi les quatre, il vaut la peine de faire intervenir les fréquences des isomères. Ainsi nous levons l'indétermination et déterminons les six paramètres par la condition que, couplant avec le mode  $S_2$ , nous puissions trouver exactement la raie bien connue  $1567\text{ cm}^{-1}$ , fréquence de la molécule bisubstituée, dans la position *trans* (note 2).

Dans le tableau suivant, on donne les valeurs des paramètres dont chaque mode dépend. Nous donnons aussi, dans le Tableau III, les valeurs de ces paramètres transformées en forces de liaison chimiques. Toutes les notations et transformations ont été définies dans le travail de Manneback et Verleysen ; nous n'insistons pas ici.

TABEAU II <sup>(1)</sup>

unité en  $10^5\text{ dynes-cm.}$

	$S_1$	$A_1$	$A_2$	$S_2$
A	41,256	9,537	15,872	17,718
B	7,351	9,537	8,183	6,877
C	19,538	16,833	15,872	16,314
D	-5,591	-9,537	9,048	6,006
E	8,515	7,611	-15,872	-15,298
F	-5,881	-7,611	-9,048	-9,063

<sup>(1)</sup> Pour les modes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $S_2$  les 6 constantes A ... F de la fonction potentielle se réduisent à 3 distinctes.

TABLEAU III

$S_1$	$A_1$	$A_2$	$S_2$
$F = 9,356$			
$\varphi_1 = 5,446$	$\varphi_2 = 5,372$	$\varphi_3 = 5,399$	$\varphi_4 = 5,421$
$\gamma_1 = 1,276$	$\gamma_2 = 1,121$	$\gamma_3 = 0,615$	$\gamma_4 = 0,373$
$g_1 = 0,184$	$g_2 = -0,190$	$g_3 = -0,550$	$g_4 = -0,378$
$f_c = -0,387$		unité = $10^5$ dynes-cm.	
$\gamma_c = -0,691$			

On voit que ces valeurs sont nettement supérieures à celles de Manneback et Verleysen. Ceci se conçoit facilement, puisque les petits termes d'ordre supérieur sont contenus implicitement dans notre fonction potentielle. Rappelons que les paramètres  $f_c$  et  $\gamma_c$  expriment respectivement un couplage élastique entre les variations de distance C-C, d'une part, et les variations de distance C-H, respectivement d'angle HCH, d'autre part.

Nous avons vérifié que ces coefficients permettent de retrouver les fréquences observées de  $C_2H_4$  et de  $C_2D_4$  que nous avons adoptées à  $1\text{ cm}^{-1}$  près. La différence est due aux petits écarts entre  $R_e$  et  $R_s$ .

Ayant ces paramètres, il est facile de calculer les fréquences d'autres isomères. En voici les résultats, exprimés en nombres d'ondes par  $\text{cm}^{-1}$ .

TABLEAU IV

	Calculées	Observées	Calc.-Obs.	Erreur pour cent
$C_2H_3D$	3094	3104	-10	0,3
	3029	3016	13	0,4
	2986	2965	21	0,7
	2272	2266	6	0,3
	1600	1600	0	0
	1393	1397	-4	0,3
	1269	1285	-16	1,2
	948	—	—	—
	799	—	—	—
$C_2H_2D_2$ cis $\pi_y$	3056	3046	10	0,3
	2295	2290	5	0,2
	1570	1567	3	0,2
	1222	—	—	—
	759	763	-4	0,5



$\sigma_y$	3033	—	—	—
	2249	—	—	—
	1293	1282	11	0,9
	831	—	—	—
C <sub>2</sub> H <sub>2</sub> D <sub>2</sub> trans S	3038	3033	5	0,2
	2277	2276	1	0
	1567	1567	0	0
	1213	1214	-1	0
	818	—	—	—
A	3053	—	—	—
	2260	—	—	—
	1310	—	—	—
	774	—	—	—
C <sub>2</sub> H <sub>2</sub> D <sub>2</sub> asy. $\pi_x$	3005	—	—	—
	2232	2221	11	0,5
	1588	1581	7	0,4
	1361	1379	-18	1,3
	1033	—	—	—
	3090	—	—	—
	2322	—	—	—
	946	—	—	—
	741	—	—	—
C <sub>2</sub> HD <sub>3</sub>	3045	—	—	—
	2352	—	—	—
	2274	2272	2	0,1
	2227	2215	12	0,5
	1548	1545	3	0,2
	1256	—	—	—
	1028	—	—	—
	811	—	—	—
	720	—	—	—

On voit ainsi que, sans rien changer à la structure de la fonction potentielle de Manneback et Verleysen, l'introduction de masses spectroscopiques permet déjà de réduire notablement les écarts avec l'expérience.

Deux raies, d'intensité extrêmement faible, de fréquences 863 cm<sup>-1</sup> et 996, que les expérimentateurs ont identifiées comme dues respectivement à la molécule bisubstituée CIS ou TRANS, et à la molécule trisubsti-

tuée, ne trouvent pas leurs places dans le Tableau IV. Cependant il ne faut pas oublier qu'en plus des vibrations planes, existent des vibrations gauches. Il est donc naturel, comme c'est le cas pour la raie infra-rouge  $719,5\text{--}724,7\text{ cm}^{-1}$  dans les mesures de Sutherland sur  $\text{C}_2\text{D}_4$ , que des fréquences gauches se mêlent quelquefois à des raies de vibrations planes.

Toutefois, nous devons signaler que les mesures de raies Raman du monosubstitué, des trois bisubstitués, et du trisubstitué sont faites dans un même état physique : liquide, température  $-150^\circ\text{C}$ . Il en est de même pour les raies Raman des modes  $\text{S}_1$  et  $\text{S}_2$  des molécules  $\text{C}_2\text{H}_4$  et  $\text{C}_2\text{D}_4$ . Toutes les raies ont été obtenues au moyen d'un même spectrographe par M. de Hemptinne. Seules, les raies de modes  $\text{A}_1$  et  $\text{A}_2$  de la molécule  $\text{C}_2\text{D}_4$  sont mesurées à l'état de vapeur, dans l'infra-rouge, par Sutherland ; celles de  $\text{C}_2\text{H}_4$ , de mêmes modes  $\text{A}_1$  et  $\text{A}_2$ , ont été mesurées sur la vapeur également par Bonner. Manquant de données homogènes, nous avons dû mêler les données provenant de conditions physiques différentes. Il n'est donc pas étonnant que les fréquences calculées de mode S de la molécule bisubstituée, en position *trans*, soient beaucoup plus voisines des fréquences expérimentales que les autres, puisque le mode S du bisubstitué est obtenu par couplage de deux modes  $\text{S}_1$  et  $\text{S}_2$ , observés dans les mêmes conditions physiques que le mode S lui-même.

Avec les méthodes de calcul que nous indiquons dans les notes, il serait possible de déterminer les fréquences infra-rouges que donneraient les molécules  $\text{C}_2\text{H}_4$  et  $\text{C}_2\text{D}_4$  à l'état liquide, en s'appuyant sur les données Raman du monosubstitué, des bisubstitués, et du trisubstitué. Nous pourrions ainsi rendre homogènes toutes les données, et par suite, déterminer la fonction potentielle avec une approximation encore plus satisfaisante.

Nous terminons en remerciant vivement MM. les professeurs Lemaitre et Manneback, des directives qu'ils nous ont données, et des bons conseils qu'ils nous ont prodigués.

#### NOTE I

Les mouvements de vibration des molécules monosubstituées et bisubstituées peuvent être considérés comme les mouvements de  $\text{C}_2\text{H}_4$  soumis à des perturbations. Pour mieux le montrer, faisons le changement de variables :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= \frac{\mathbf{A}_i}{2\mathbf{M}} k^2, & \mathbf{B}_i &= \frac{\mathbf{B}_i}{4m_{\text{H}}} k^2, & \mathbf{C}_i &= \frac{\mathbf{C}_i}{4m_{\text{H}}} k^2, \\ \mathbf{D}_i &= \frac{\mathbf{D}_i}{\sqrt{8\mathbf{M} m_{\text{H}}}} k^2, & \mathbf{E}_i &= \frac{\mathbf{E}_i}{\sqrt{8\mathbf{M} m_{\text{H}}}} k^2, & \mathbf{F}_i &= \frac{\mathbf{F}_i}{4m_{\text{H}}} k^2, \end{aligned}$$

dans lequel  $k = 1306\text{ cm}^{-1}$  est un coefficient de réduction qui nous

permet d'introduire directement les fréquences mesurées en nombres d'ondes dans les équations de mouvement.

Les équations de mouvement des molécules  $C_2H_4$ ,  $C_2H_3D$  et  $C_2H_2D_2$ , après ce changement de variables, peuvent être mises sous la même forme :

$$(1) \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} (A_i - v^2) \zeta_i + D_i \xi_i + E_i \eta_i = 0 \\ D_i \zeta_i + (B_i - v^2) \xi_i + F_i \eta_i = \lambda v^2 \Sigma \xi_i \\ E_i \zeta_i + F_i \xi_i + (C_i - v^2) \eta_i = \lambda v^2 \Sigma \eta_i \end{array} \right.$$

dans lesquelles  $\lambda$  est une constante caractéristique de la molécule considérée.

Quand  $\lambda = 0$ , les deuxièmes membres n'existent plus ; on reconnaît alors les quatre systèmes séparés des équations du mouvement de  $C_2H_4$ .

On peut regarder les deuxièmes membres comme étant des termes de perturbation, sans vouloir dire par là que ces termes sont petits. Il suffit de donner à  $\lambda$  la valeur  $\frac{m_D - m_H}{4 m_H}$  pour pouvoir retrouver les équations du mouvement de monosubstitué.

On reconnaît aussi facilement les équations de mouvement des bisubstitués en y mettant  $\lambda = \frac{2(m_D - m_H)}{4 m_H}$ . Les séparations en deux systèmes de six équations correspondant à deux modes de mouvement sont déjà indiquées dans le travail de Manneback et Verleysen. Insistons seulement que les signes  $\Sigma$  ne s'étendent qu'à deux indices seulement dans ce cas-là.

Dans les deux cas, les fréquences de vibration sont les racines non nulles de l'équation

$$\left( \frac{1}{\lambda} - \Sigma \frac{v^2 X_i}{\Delta_i} \right) \left( \frac{1}{\lambda} - \Sigma \frac{v^2 Y_i}{\Delta_i} \right) - \left( \Sigma \frac{v^2 Z_i}{\Delta_i} \right)^2 = 0,$$

où les  $\Delta_i$  sont les déterminants formés par les coefficients du premier membre des équations (1), et les  $X_i$ ,  $Y_i$  et  $Z_i$  en sont certains mineurs. Les racines s'obtiennent facilement en suivant la méthode qui a déjà été indiquée.

On voit donc l'avantage de ce changement de variables. Il nous permet pratiquement de traiter les trois molécules isomères au moyen des mêmes coefficients  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ , etc., et mêmes polynômes  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  et  $\Delta_i$ , et de ce fait, on peut facilement déterminer, en cas de nécessité, les paramètres d'un système partiel, correspondant à une valeur particulière de  $i$ , en connaissant des valeurs des fréquences de certains substitués.

NOTE II

Les relations entre les fréquences et paramètres de mode  $S_1$  sont <sup>(1)</sup>

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \Sigma v_{\mathbf{H}}^2 \equiv a_{\mathbf{H}} \quad (1)$$

$$\mathbf{A} + \mu(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \Sigma v_{\mathbf{D}}^2 \equiv a_{\mathbf{D}} \quad (2)$$

$$\mathbf{BC} - \mathbf{F}^2 + \mathbf{AC} + \mathbf{AB} - \mathbf{D}^2 - \mathbf{E}^2 = \Sigma v_{\mathbf{H}}^2 v_{\mathbf{H}}'^2 \equiv b_{\mathbf{H}} \quad (3)$$

$$\mu^2(\mathbf{BC} - \mathbf{F}^2) + \mu(\mathbf{AC} + \mathbf{AB} - \mathbf{D}^2 - \mathbf{E}^2) = \Sigma v_{\mathbf{D}}^2 v_{\mathbf{D}}'^2 \equiv b_{\mathbf{D}} \quad (4)$$

$$\mathbf{ABC} + 2\mathbf{DEF} - \mathbf{AF}^2 - \mathbf{BE}^2 - \mathbf{CD}^2 = \Pi v_{\mathbf{H}}^2 \equiv c_{\mathbf{H}} \quad (5)$$

où  $\mu = \frac{m_{\mathbf{H}}}{m_{\mathbf{D}}}$ .

Les équations (1) et (2) donnent

$$\mathbf{A} = \frac{a_{\mathbf{D}} - \mu a_{\mathbf{H}}}{1 - \mu}$$

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \frac{a_{\mathbf{H}} - a_{\mathbf{D}}}{1 - \mu} \equiv 2g. \quad (6)$$

Les équations (3) et (4) donnent

$$\mathbf{BC} - \mathbf{F}^2 = \frac{\mu b_{\mathbf{H}} - b_{\mathbf{D}}}{\mu(1 - \mu)} \quad (7)$$

comme

$$(\mathbf{B} - \mathbf{C})^2 + 4\mathbf{F}^2 = (\mathbf{B} + \mathbf{C})^2 - 4(\mathbf{BC} - \mathbf{F}^2) \equiv 4f^2 \quad (8)$$

est une quantité connue par (6) et (7), nous pouvons écrire, en introduisant un paramètre angulaire  $\theta$  tel que

$$\mathbf{B} - \mathbf{C} = 2f \cos \theta,$$

$$\mathbf{F} = f \sin \theta, \quad (9)$$

alors

$$\mathbf{B} = g + f \cos \theta,$$

$$\mathbf{C} = g - f \cos \theta. \quad (10)$$

Les équations (3) et (5) permettent d'écrire

$$\mathbf{D}^2 + \mathbf{E}^2 = \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) + (\mathbf{BC} - \mathbf{F}^2) - b_{\mathbf{H}} \equiv h^2, \quad (11)$$

$$\mathbf{CD}^2 + \mathbf{BE}^2 - 2\mathbf{DEF} = \mathbf{A}(\mathbf{BC} - \mathbf{F}^2) - c_{\mathbf{H}} \equiv j, \quad (12)$$

$h$  et  $j$  sont des quantités connues.

En remplaçant les valeurs  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{F}$  dans (12), on a

$$g(\mathbf{D}^2 + \mathbf{E}^2) - f(\mathbf{D}^2 - \mathbf{E}^2) \cos \theta - 2\mathbf{DE}f \sin \theta = j,$$

---

<sup>(1)</sup> Nous supprimons partout l'indice 1 dont il faudrait affecter les  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , etc.



d'où

$$(\mathbf{D}^2 - \mathbf{E}^2) \cos \theta + 2 \mathbf{D} \mathbf{E} \sin \theta = \frac{gh^2 - j}{f} \equiv n,$$

or

$$(\mathbf{D}^2 - \mathbf{E}^2)^2 = (\mathbf{D}^2 + \mathbf{E}^2)^2 - 4 \mathbf{D}^2 \mathbf{E}^2 = h^4 - 4 \mathbf{D}^2 \mathbf{E}^2;$$

d'où

$$(h^4 - 4 \mathbf{D}^2 \mathbf{E}^2) \cos^2 \theta = 4 \mathbf{D}^2 \mathbf{E}^2 \sin^2 \theta - 4n \mathbf{D} \mathbf{E} \sin \theta + n^2,$$

$$\mathbf{D}^2 \mathbf{E}^2 - n \mathbf{D} \mathbf{E} \sin \theta + \frac{n^2 - h^4 \cos^2 \theta}{4} = 0,$$

en résolvant

$$\mathbf{D} \mathbf{E} = \frac{n}{2} \sin \theta \pm \frac{\cos \theta}{2} \sqrt{h^4 - n^2}.$$

Posons  $\frac{n}{h^2} = \cos \varphi$ , ce qui est une quantité connue.

On a

$$\mathbf{D} \mathbf{E} = \frac{h^2}{2} \sin (\theta \pm \varphi), \quad (13)$$

en résolvant (11) et (13), on a :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \pm h \cos \frac{\theta \pm \varphi}{2}, \\ \mathbf{E} &= \pm h \sin \frac{\theta \pm \varphi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Ainsi, sauf la constante  $\mathbf{A}$ , les cinq autres paramètres peuvent être exprimés en fonction d'un seul paramètre. Ce résultat met bien en évidence l'indétermination dont il a été question dans le texte.

L'équation générale de la Note I permet de déterminer ce paramètre, connaissant une fréquence d'un des substitués.

*Louvain, Institut de Physique de l'Université.*

*Février 1938.*

## SUR LA TAILLE DES LAMES DE QUARTZ PERPENDICULAIREMENT A L'AXE OPTIQUE

par M. A. BIOT

---

*Sommaire.* — A l'aide d'un conoscope muni d'un plateau tournant et d'un réticule dans le plan focal arrière de l'objectif, il est possible de déterminer les erreurs de perpendicularité des lames de quartz à faces planes et parallèles. Il suffit pour cela de les incliner convenablement. Pour obtenir une précision de l'ordre de 1' il convient de placer le quartz non directement sur le plateau mais sur une charnière intermédiaire dont le mouvement est commandé par une vis graduée.

1<sup>o</sup>) *Le problème.* — La question a été étudiée par M. R. Servant dans le numéro de juin-juillet 1937 de la *Revue d'Optique*. Considérant une lame de quartz à faces planes et parallèles taillée presque perpendiculairement à l'axe optique, il établit d'abord mathématiquement la propriété suivante suffisamment approchée tant que l'erreur de taille est faible :

Plaçons la lame dans un conoscope. Les anneaux que l'on observe sont circulaires et centrés sur un point correspondant à l'axe optique du quartz.

Cette proposition est d'ailleurs quasi-évidente.

M. Servant décrit ensuite un dispositif dont l'emploi permet de détecter des erreurs de taille de l'ordre de 1'.

Pendant plusieurs années, utilisant la proposition rappelée ci-dessus, nous nous sommes servi d'une méthode différente de la sienne et qui est assez simple pour qu'il soit utile de la faire connaître.

2<sup>o</sup>) *Remarques préliminaires.* — A. Quand on doit utiliser une lame de quartz perpendiculaire à l'axe, il importe évidemment de déterminer avec quelle précision il convient de la tailler. Cette précision dépend naturellement du problème que la lame sert à résoudre. Dans le cas des lames pour saccharimètres par exemple une précision de 5' semble suffisante. On sait, en effet, que pour les pièces de quartz utilisées dans ces instruments, ce n'est qu'à partir d'une inclinaison de plus de 10' sur l'axe optique que l'état de polarisation des rayons lumineux commence à devenir pratiquement différent de celui qui existe sur cet axe. Cette précision de 5', qui suffit dans la plupart des

cas de la pratique, est facile à atteindre et rapidement, avec des moyens très réduits par une méthode que nous allons décrire. Une précision de l'ordre de 1', que l'on peut obtenir également, exige par contre des moyens un peu plus élaborés.

B. Nous utilisons un conoscope. Dans la forme classique de cet instrument le cristal à l'étude se trouve placé entre deux pièces d'optique pour lesquelles on peut prendre des condensateurs de microscope. Il va sans dire que, selon la précision requise dans les observations, selon aussi l'épaisseur du cristal à l'étude, on pourra être amené à utiliser d'autres systèmes optiques qu'il faudra adapter aux circonstances. Remarquons toutefois qu'il est illusoire d'augmenter, dans un but de précision, la distance focale du système objectif au-delà de certaines limites : les franges que l'on observe au foyer de ce système sont en effet d'autant plus larges, donc moins nettes, que sa distance focale est plus grande.

C. L'examen au conoscope est possible sur des lames épaisses de plus de 5 cm. Il faut naturellement pour cela que la « pureté » optique du cristal soit suffisante. Il s'agit ici de l'absence non seulement de mâcles de cristaux droits et gauches donnant des spirales, mais encore de ces défauts locaux qui ne font que déformer les anneaux, leur donnant par exemple une forme ovale. Peut-être est-il utile de signaler ici que parmi les nombreux blocs de quartz que nous avons étudiés, les plus purs, au point de vue optique, étaient ceux qui avaient été roulés, provenant par conséquent de cristaux assez volumineux, et non pas les petits cristaux assez bien formés.

30) *Le dispositif simple.* — Considérons un conoscope réglé à l'extinction. Dans le plan focal de l'objectif, là où se produisent les franges, plaçons un réticule gravé de traits parallèles. Il est commode que l'on puisse le déplacer dans son plan perpendiculairement aux traits : il est possible ainsi d'amener à tout moment en coïncidence un trait du micromètre et le bord d'une frange observée. Le quartz est placé, comme on sait, entre le condensateur et l'objectif.

Supposons d'abord qu'il soit taillé bien perpendiculairement à son axe optique. Pratiquement les franges sont des circonférences centrées, même si l'axe du quartz ne coïncide pas avec l'axe optique du système de lentilles, c'est-à-dire si la lame est inclinée sur l'axe optique de ce système. Si le quartz est porté par un plateau, il n'est pas nécessaire <sup>(1)</sup> que le plan de celui-ci soit perpendiculaire à l'axe optique des lentilles. Mais si ce plateau est rotatif, il convient que l'axe de rotation soit perpendiculaire à la face qui reçoit le quartz avec une préci-

---

(1) Pour la seule observation de la figure d'interférence.



sion plus grande que celle que l'on recherche dans la taille, si l'on désire que les franges ne tournent pas avec le plateau.

Si les faces du quartz ne sont pas perpendiculaires à l'axe optique, par contre, les franges tournent devant le réticule. Mais elle ne tournent plus si l'on soulève convenablement le quartz de manière que l'axe de rotation, réfracté dans la lame, coïncide dans celle-ci avec l'axe du quartz. Si  $\epsilon$  est l'angle d'inclinaison de l'axe du quartz sur la perpendiculaire aux faces de la lame, l'angle dont il faut soulever le quartz vaut  $n\epsilon$ ,  $n$  étant l'indice du quartz suivant l'axe, soit 1,55.

En pratique, on soulèvera le quartz en glissant dessous, du côté convenable, des lamelles d'épaisseur connue, ce qui permet de calculer l'angle dont on l'incline. Par ailleurs, il est clair que l'axe du quartz se trouve dans le plan perpendiculaire à l'arête du petit biseau que l'on crée dessous en le soulevant.

4<sup>o</sup>) *Le dispositif plus précis.* — L'usage des cales peut devenir pénible, voire délicat, si l'on recherche une précision de l'ordre de 1'. Si l'on veut éviter cet inconvénient, on ne placera pas le quartz directement sur le plateau tournant, mais sur un intermédiaire consistant en une sorte de charnière dont l'un des côtés peut se soulever sous l'action d'une vis graduée, permettant d'évaluer le centième de mm. On peut réaliser l'ensemble du dispositif de différentes manières. On veillera seulement à ce que la lame de quartz puisse venir se placer très près du condensateur du conoscope.

# REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

---

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries : la première série comprend 30 volumes (1877-1891); la deuxième, 20 volumes (1892-1901); la troisième, 30 volumes (1902-1921); la quatrième série, 30 volumes (1922-1936). Le fascicule de janvier 1937 ouvre la cinquième série.

La revue paraît six fois par an depuis 1928. Chaque livraison renferme trois parties principales :

La première partie se compose d'Articles originaux, où sont traités les sujets les plus variés se rapportant à l'ensemble des sciences mathématiques, physiques, naturelles, sociales, etc.

La deuxième partie consiste en une Revue des Revues et des Publications périodiques.

La troisième partie consiste en une Bibliographie scientifique, analyse critique des principaux ouvrages scientifiques récemment parus.

Chaque livraison contient ordinairement aussi un ou plusieurs articles de Variétés.

## CONDITIONS D'ABONNEMENT

L'abonnement est payable annuellement avant la fin de février. Il court jusqu'à ordre contraire.

Belgique et Grand-Duché de Luxembourg	80 francs belges
France . . . . .	80 francs français
Autres pays . . . . .	26 belgas

---

*Pour tout ce qui concerne la Rédaction, s'adresser au Secrétariat de la Revue, Collège philosophique, Eegenhoven (Louvain).*

*Pour ce qui concerne l'Administration, s'adresser au Secrétariat de la Société scientifique, 2, rue du Manège, Louvain. Compte chèques postaux n° 202746.*

*Compte chèques postaux Paris, n° 110002, Société scientifique.*



# PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

## EXTRAIT DU CATALOGUE

**ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES**, t. I à t. XLVI, 1875 à 1926. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. 50,00

### TABLES ANALYTIQUES DES ANNALES,

t. I à XXV (1875 à 1901) . . . . . fr. 10,00  
t. XXVI à XLVI (1902 à 1926). . . . . fr. 20,00

### ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

Série A (sc. mathématiques), t. XLVII à t. LVI (1927 à 1936) fr. 35,00  
Série B (sc. physiques et naturelles) » fr. 35,00  
Série C (sc. médicales) (1927 et 1928) fr. 50,00 — (1929 à 1933) fr. 20,00  
(1934 à 1936) fr. 10,00  
Série D (sc. économ. et techniques) (1927 à 1929) fr. 10,00 — (1930) fr. 30,00  
(1931 à 1936) fr. 50,00  
Série I (sc. mathématiques et physiques), t. LVII (1937) fr. 35,00  
Série II (sc. naturelles et médicales), t. LVII (1937) fr. 35,00  
Série III (sc. économiques), t. LVII (1937) fr. 50,00

### REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES,

t. I à XCII (1877 à 1927). Les deux volumes annuels . . . fr. 60,00  
Le fascicule trimestriel . . . . . fr. 17,00  
t. XCIII à CXII (1928 à 1937) . . . . . fr. 80,00  
Le fascicule . . . . . fr. 14,00

### TABLES ANALYTIQUES DE LA REVUE,

t. I à L (1877 à 1901) . . . . . fr. 10,00  
t. LI à LXXX (1902 à 1921) . . . . . fr. 10,00  
t. LXXXI à CX (1922 à 1936) . . . . . fr. 15,00

### LES PORTS ET LEUR FONCTION ÉCONOMIQUE (1906 à 1910).

Cinq volumes. Chaque volume . . . . . fr. 20,00

Le premier volume est épuisé ; mais on peut en trouver les articles dans les livraisons d'avril et de juillet 1906 de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

### MONOGRAPHIES DES SCIENCES NATURELLES

- I. — **B. Tougarinoff**. Les réactions organiques dans l'analyse qualitative minérale (cations). — Un vol. in-8° de 107 pages (1930) : en Belgique, fr. 12,00 ; en France, fr. fr. 12,00 ; autres pays, belgas 4,00.
- II. — **V. Schaffers**. Le paratonnerre et ses progrès récents. Un vol. in-8° de 90 pages (1931) : en Belgique, fr. 12,00 ; en France, fr. fr. 12,00 ; autres pays, belgas 4,00.

### MONOGRAPHIES DES SCIENCES ÉCONOMIQUES

- I. — **P. Simon**. L'organisation économique et sociale du Manchoukuo. Un vol. in 8° de 211 pages, avec 3 planches hors-texte (1937) . fr. 30,00
- II. — **A. Henry**. La structure technique de l'agriculture belge et ses particularités en Wallonie et en Flandre. Un vol. de 66 pages . . fr. 10,00
- III. — **A. Henry**. Les variations régionales de l'Agriculture en Belgique. Un vol. de 50 pages, fr. 5,00.